Espaces vectoriels normés : devoir maison no. 2

- une copie double maximum, à rendre pour le **4 avril 2008** -

Résoudre deux exercices et laisser un ; énoncer au début du devoir quel exercice vous avez laissé. Il ne sera pas pris en compte un troisème exercice que si les deux choisis sont entièrement abordés.

Exercice I.

On considère l'espace de Hilbert complexe $E = L^2([0,1];\mathbb{C})$ muni du produit scalaire habituel $(x,y) = \int_0^1 x(s)\overline{y(s)}ds$, $x, y \in E$. Pour tout $x \in E$ on pose

$$\forall t \in [0,1], \quad Tx(t) = ie^{i\pi\, t}\left(\int_0^t e^{-i\pi\, s}x(s)ds - \int_t^1 e^{-i\pi\, s}x(s)ds\right).$$

1. Prouver que $\forall y \in E$ et $\forall (s,t) \in [0,1]\times[0,1]$ on a $\left|\int_s^t y(u)du\right| \leqslant \sqrt{|t-s|}\|y\|$.
2. Montrer que $\forall x \in E$, la fonction Tx est continue sur $[0,1]$ et bornée par $\|x\|$.
3. En déduire que T est un opérateur linéaire continu de E dans E.
4. Une suite $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \subset E$ converge faiblement vers x si $\forall y \in E$, $\lim_{n\to\infty}(x_n, y) = (x, y)$. Pourquoi le nom "faiblement" ? Justifier votre réponse.
5. On note B_E la boule unité fermée de l'espace E et on considère $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \subset B_E$ une suite qui converge faiblement vers $x \in E$. Montrer que $x \in B_E$ et que pour tout $t \in [0,1]$, la suite $\{Tx_n(t)\}_{n\geqslant 1}$ converge vers $Tx(t)$. En déduire que $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$.
6. Soit maintenant une suite $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \subset B_E$ quelconque. Montrer qu'il existe une sous-suite $\{x_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$ telle que $\{Tx_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$ est convergente ($T(B_E)$ est relativement compact).
7. Soit $x \in C([0,1];\mathbb{R})$ une fonction réelle continue. Montrer que $z := Tx \in C^1([0,1];\mathbb{C})$ et elle vérifie l'équation $z' - i\pi\, z = 2i\, x$. Vérifier que $Tx(0) = Tx(1)$.
8. On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de T s'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $Tx = \lambda x$ (vecteur propre associé). Supposons que $\lambda \neq 0$ est une valeur propre de T et soit $x \neq 0$ le vecteur propre associé. Montrer que x vérifie à la fois $\lambda x' = i(2 + \pi\,\lambda)x$ et $x(0) = x(1)$. En déduire que les valeurs possibles de λ sont ${}^2\!/_{(2k+1)\pi}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice II.

Soit $O \subset E$ un ouvert convexe d'un espace de Banach E et soit $F : O \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur O. On note $S_E = \{y \in E : \|y\| = 1\}$ la sphére unité. On dit que F est *Fréchet différentiable* en un point $x \in O$ s'il existe f fonctionnelle linéaire continue (la différentielle Fréchet de F) telle que

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(x+ty) - F(x)}{t} = f(y), \qquad \text{uniformément pour } y \in S_E. \tag{1}$$

On dit que F est *convexe* si $F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y)$, $\forall x, y \in O$ et $\lambda \in [0,1]$. Dans la suite de l'exercice nous allons supposer que $F : O \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe sur $O \subset E$ un ouvert convexe.

1. Montrer que F est Fréchet différentiable en $x \in O$ avec différentielle Fréchet f ssi $\lim_{y\to 0} \frac{F(x+y)-F(x)-f(y)}{\|y\|} = 0$.
2. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{F(x+ty)-F(x)}{t}$ est croissante en t, $\forall x \in O$, $\forall y \in S_E$ et t tel que $x + ty \in O$.
3. En déduire que, $\forall x \in O$, $\forall y \in S_E$ existent finies $f^+(y) := \lim_{t\downarrow 0} \frac{F(x+ty)-F(x)}{t}$ et $f^-(y) := \lim_{t\uparrow 0} \frac{F(x+ty)-F(x)}{t}$. Vérifier que $f^+(y) \geqslant f^-(y)$, $\forall y \in S_E$.
4. On suppose que F est continue en $x \in O$. On veut montrer que F est Fréchet différentiable en x ssi
$$\lim_{t\to 0} \frac{F(x+ty)+F(x-ty)-2F(x)}{t} = 0, \quad \text{uniformément pour } y \in S_E \tag{2}$$
   (a) Montrer que si F satisfait (1), alors $f^+(y) = f^-(y)$, $\forall y \in S_E$ et on déduit (2).
   (b) Réciproquement, si (2) est vraie, déduire que $f^+ = f^-$. Notons f la valeur commune. Montrer que f est une fonctionnelle linéaire. Montrer que $\exists \delta, K > 0$ tels que $F \leqslant K$ sur $x + \delta B_E$. En déduire que $f(y) \leqslant \frac{K-F(x)}{\delta}$, $\forall y \in S_E$. Conclure.
   (c) Montrer que F est Fréchet différentiable en x ssi $\lim_{y\to 0} \frac{F(x+y)+F(x-y)-2F(x)}{\|y\|} = 0$.

Exercice III.

Dans cet exercice on admettra les définitions et les résultats de l'exercice précédent **II**. Dans la suite E est un espace de Banach de norme $\|\cdot\|$. On note $S_E = \{y \in E : \|y\| = 1\}$ la sphére unité.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une fonction convexe.
2. Supposons que $\|\cdot\|$ est Fréchet différentiable en $x \in S_E$. Montrer que sa différentielle f est une fonctionnelle linéaire avec $\|f\| \leqslant 1$ et $f(x) = 1$.
3. On veut montrer que $\|\cdot\|$ est Fréchet différentiable en $x \in S_E$ ssi une suite $\{f_n\}_{n\geqslant 1} \subset S_{E^\star}$ est convergente lorsque $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$.
   (a) Montrer que la condition est une forme modifiée de la condition $\lim_{n\to\infty} \|f_n - g_n\| = 0$ lorsque $\{f_n\}, \{g_n\} \subset S_{E^\star}$ satisfont $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = 1$.

   Dans la suite on pourra utiliser le résultat de **II.4.(c)**.

   (b) Supposons que $\|\cdot\|$ est Fréchet différentiable en $x \in S_E$ et soient $\{f_n\}, \{g_n\} \subset S_{E^\star}$ telles que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = 1$. Montrer que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ et $\exists n_0 \geqslant 1$ tels que $(f_n - g_n)(y) \leqslant |1 - f_n(x)| + |1 - g_n(x)| + \varepsilon\|y\| \leqslant 3\varepsilon\delta$ lorsque $n \geqslant n_0$ et $\|y\| \leqslant \delta$. En déduire $\lim_{n\to\infty} \|f_n - g_n\| = 0$.
   (c) Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $\{y_n\}$ telle que $\lim_{n\to\infty} \|y_n\| = 0$ et $\|x + y_n\| + \|x - y_n\| \geqslant 2 + \varepsilon\|y_n\|$, $\forall n \geqslant 1$. Montrer que l'on peut choisir $\{f_n\}, \{g_n\} \subset S_{E^\star}$ telles que $f_n(x + y_n) = \|x + y_n\|$ et $g_n(x + y_n) = \|x - y_n\|$. En déduire que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}(\|x+y_n\| - f_n(y_n)) = 1$ et de même pour $g_n(x)$. Montrer que $\|f_n - g_n\| \geqslant \varepsilon$, $\forall n \geqslant 1$ et conclure.