Probabilités de base : devoir maison no. 1

- une copie double maximum, à rendre pour le **6 novembre 2007** -

Exercice I. (d'après l'exercice **1.23**)

(i) Une personne a n clés dans sa poche et veut ouvrir sa porte dans l'obscurité. Elle prend au hasard les clés les unes après les autres et les essaye. On note X le nombre de clés qu'elle essaye avant de trouver la bonne. En supposant qu'une clé une fois essayée est ensuite mise de côté, quelle est la probabilité que cette personne tire la bonne clé à la k-ième tentative ? Quelle est la loi de X, son espérance, sa variance, sa fonction caractéristique ?

(ii) Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On extrait ces boules de l'urne les unes après les autres, au hasard et sans remise, et on note R_k le numéro porté par la k-ième boule tirée de l'urne. Donner la loi de R_k, son espérance et sa variance, sa fonction caractéristique.

(iii) On note $W_N = R_1 + \ldots + R_N$. Calculer l'espérance de W_N. Trouver la loi du couple (R_j, R_k), $j \neq k$, et montrer qu'elle ne dépend pas de (j, k). Calculer $\mathrm{E}(W_N^2)$, $\mathrm{E}(R_j R_k)$, puis la variance de W_N. Les variables R_j et R_k, avec $j \neq k$, sont-elles indépendantes ? non-corrélées ?

Exercice II. (d'après l'exercice **2.14**)

(i) Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$ (normale centrée réduite). On note $U = X\cos\theta - Y\sin\theta$ et $V = X\sin\theta + Y\cos\theta$. Trouver la loi de (U, V) et de ses marginales. U, V sont-elles indépendantes ? non-corrélées ?

(ii) Soient R et Θ deux variables aléatoires indépendantes telles que $\Theta \sim \mathcal{U}_{[0,2\pi]}$ (uniforme sur $[0, 2\pi]$ et $R > 0$ avec $R^2 \sim \mathcal{E}(1/2)$ (exponentielle de paramètre $1/2$). On note $Z = R\cos\Theta$ et $W = R\sin\Theta$. Trouver leurs lois et étudier leur indépendance.