

Probabilités de base : devoir maison no. 1

- une copie double maximum, à rendre pour le **20 octobre 2008** -

Exercice I.

Soient p_1, p_2, p_{12} trois réels. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

- il existe deux événements A et B dans un espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) tels que $p_1 = P(A)$, $p_2 = P(B)$ et $p_{12} = P(A \cap B)$;
- les inégalités $1 - p_1 - p_2 + p_{12} \geq 0$, $p_1 - p_{12} \geq 0$, $p_2 - p_{12} \geq 0$, $p_{12} \geq 0$ sont satisfaites.

Exercice II.

On répète une expérience à deux issues (succès, échec) une infinité de fois. La probabilité de chaque succès est $0 < p < 1$. On note X la longueur de la première suite de succès ou d'échecs successifs et Y la longueur de la deuxième suite de succès ou d'échecs successifs. Trouver les lois de X et de Y . Calculer leur espérances et variances. Quelle est la loi du couple (X, Y) ?

Exercice III.

Soit X une variable aléatoire de loi de Cauchy. Calculer $E(\min\{|X|, 1\})$.

Exercice IV.

La densité du couple aléatoire (X, Y) est

$$f(x, y) = \begin{cases} [(1 + ax)(1 + ay) - a]e^{-x-y-axy}, & \text{si } x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $0 < a < 1$. Calculer les densités marginales de X et de Y , la fonction de répartition du couple (X, Y) ainsi que sa matrice de covariance.

Exercice V.

La variable aléatoire X admet la densité $f(x) = c \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) \mathbf{1}_{\{|x| \leq a\}}$. Trouver c . Calculer la fonction caractéristique de X . Que valent $E(X)$, $\text{Var}(X)$?