# Espaces vectoriels normés : devoir maison no. 1

- une copie double maximum, à rendre pour le **7 mars 2008** -

**Exercice I.** On considère $E$ un espace de Hilbert et une fonctionnelle $L : E \times E \to \mathbb{C}$ qui satisfait : $L(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 L(x_1, y) + \alpha_2 L(x_2, y)$, $L(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \bar{\beta}_1 L(x, y_1) + \bar{\beta}_2 L(x, y_2)$,

$$\exists \chi > 0 \quad \text{t.q.} \quad |L(x,y)| \leqslant \chi \|x\| \cdot \|y\| \qquad \text{et} \qquad \exists \kappa > 0 \quad \text{t.q.} \quad |L(x,x)| \geqslant \kappa \|x\|^2.$$

On veut montrer qu'il existe un opérateur linéaire borné $S : E \to E$, avec $\|S\| \leqslant 1/\kappa$, dont l'inverse $S^{-1}$ est borné, avec $\|S^{-1}\| \leqslant \chi$ et tel que $(x, y) = L(x, Sy)$, $\forall x, y \in E$.

1. Montrer que $D := \{y \in E : \exists y^* \in E \text{ t.q. } (x, y) = L(x, y^*), \forall x \in E\}$ est non-vide.
2. Montrer que $y^*$ tel que $(x, y) = L(x, y^*)$, $\forall x \in E$, est déterminé d'une façon unique par $y$ ; on note par $S$ l'application définie par $D \ni y \mapsto y^* \in E$.
3. Montrer que $S$ est un opérateur linéaire continu et que $\|S\| \leqslant 1/\kappa$.
4. Montrer que le domaine de définition $D$ de $S$ est un fermé de $E$.
5. Supposons que $D \neq E$, ce qui revient à l'existence d'un vecteur $v \in E$, $v \neq 0$ et $v \in D^\perp$ (pourquoi ?) et on définit $f : E \to \mathbb{C}$ par $f(z) = L(z, v)$. Montrer que $f \in E^\star$. En déduire l'existence d'un vecteur $v' \in E$ tel que $v' \in D$ et $Sv' = v$. Montrer que $v = 0$ ce qui est en contradiction avec le choix de $v$ ; on a donc $D = E$.
6. Montrer qu'il existe $S^{-1}$, qu'il est défini sur tout $E$.
7. Montrer que $S^{-1}$ est un opérateur linéaire continu et que $\|S^{-1}\| \leqslant \chi$.

**Exercice II.** Soit $E$ un espace de Banach de dimension infinie. Une suite $\{e_j\}_{j \geqslant 1}$ est une *base de Schauder* de $E$ si pour tout $x \in E$, il existe une unique suite de scalaires $\{x_j\}_{j \geqslant 1}$ telle que $x = \sum_{j \geqslant 1} x_j e_j$.

1. Montrer que les vecteurs $\{e_j\}_{j \geqslant 1}$ sont linéairement indépendants.
2. Notons, pour $j \geqslant 1$, $f_j(x) := x_j$. Montrer que $f_j$ est linéaire et que $f_j(e_k) = \delta_{jk}$.
3. Montrer que $F := \left\{ (u_j)_{j \geqslant 1} \subset \mathbb{R} : \sum_{j \geqslant 1} u_j e_j \text{ converge} \right\}$ est un espace vectoriel.

   Si $y = (u_j) \in F$, montrer que $\|y\|_F := \sup_{n \geqslant 1} \left\| \sum_{j=1}^n u_j e_j \right\|_E$ est une norme sur $F$.
4. Vérfier que pour tout $y = (u_j) \in F$, on a $\|u_j e_j\|_E \leqslant 2 \|y\|_F$
5. Montrer que $F$ est un espace de Banach.
6. Soit $T : F \to E$ définie par $Ty = \sum_{j \geqslant 1} u_j e_j$, où $y = (u_j) \in F$. Montrer que $T$ est bijective, linéaire et continue. En déduire que $T^{-1}$ est aussi continue.
7. Pour $j \geqslant 1$, soit $P_j : F \to \mathbb{R}$ donée par $P_j y = u_j$, où $y = (u_j) \in F$. Montrer que $P_j$ est une fonctionnelle linéaire bornée et donner un majorant de $\|P_j\|$. En déduire que les fonctionnelles $f_j$ sont continues.