Processus stochastiques continus : devoir maison no. 6

- à rendre pour le **12 décembre 2008** -

On se place dans un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathrm{P})$ satisfaisant les "conditions habituelles".

Exercice I.
Soient X et Y deux semimartingales réelles continues. On introduit *l'intégrale de Stratonovich* :

$$\int_0^t Y_s \circ dX_s := \int_0^t Y_s dX_s + \frac{1}{2}\langle Y, X\rangle_t.$$

1) Soit $F \in \mathrm{C}^3(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et X une semimartingale réelle continue. Montrer que

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s) \circ dX_s.$$

Écrire la formule d'intégration par parties en termes d'intégrale de Stratonovich.

2) Soit $\Delta_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_k^n = t\}$ une suite de divisions de l'intervalle $[0, t]$ de pas $|\Delta_n| = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |t_j^n - t_{j-1}^n|$ tendant vers 0. Montrer que si X et Y sont deux semimartingales réelles continues, alors $\int_0^t Y_s \circ dX_s$ est la limite en probabilité, quand $n \to \infty$, de

$$\sum_{j=1}^k \frac{Y(t_{j-1}^n) + Y(t_j^n)}{2}(X(t_j^n) - X(t_{j-1}^n)).$$

Exercice II.
Soit X une semimartingale telle que $X_0 = 0$ et on considère l'équation différentielle stochastique $dY_t = a(Y_t) \circ dX_t + b(Y_t)dt$ avec $Y_0 = y$. On suppose que $a \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ avec première et deuxième dérivée bornées et que $b \in \mathrm{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ est une fonction lipschitzienne.

1) Étudier l'existence et l'unicité de cette équation.

2) Soit l'équation différentielle déterministe avec arguments aléatoires

$$\frac{dA_t}{dt} = \exp\left\{-\int_0^{X_t} a'(\varphi(A_s, s))ds\right\} b(\varphi(A_t, X_t)), \quad A_0 = y$$

où φ est la solution de l'équation au dérivées partielles

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, z) = a(\varphi(x, z)), \quad \varphi(x, 0) = x.$$

Montrer que la solution de l'équation différentielle stochastique s'obtient en résolvant les deux précédentes équations et en posant $Y_t = \varphi(A_t, X_t)$.