Processus stochastiques continus : devoir maison no. 5

- à rendre pour le **5 décembre 2008** -

On se place dans un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathrm{P})$ satisfaisant les "conditions habituelles". Soit B un mouvement brownien réel standard issu de 0.

Exercice I.
Soit $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne (constante de Lipschitz L), $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in]0,1]$. On considère les équations différentielles stochastique et ordinaire suivantes :

$$Z_0 = x, \quad dZ_t = \varepsilon dB_t + b(Z_t)dt, \quad t > 0 \quad \text{et} \quad z(0) = x, \quad dz(t) = b(z(t))dt, \quad t > 0.$$

Justifier l'existence et l'unicité des solutions de ces deux équations différentielles, notées respectivement $\{Z_t^{x,\varepsilon}; t \geqslant 0\}$ processus continu et $z^x : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ fonction de classe C^1.

1) Soit $T > 0$. Montrer que $\Delta(T) := \sup_{s\in[0,T]} |Z_s^{x,\varepsilon} - z^x(s)| \leqslant \varepsilon \sup_{s\in[0,T]} |B_s| e^{TL}$.

2) Soit $\delta > 0$. Montrer que $\mathrm{P}(\Delta(T) > \delta) \leqslant 4\mathrm{P}(B_1 > C/\varepsilon)$, où C est une constante positive qui dépend de T, δ et L.

3) En déduire que pour tout $T > 0$ et $\delta > 0$, il existe deux constantes positives c_1, c_2, dont les valeurs ne dépendent pas de (x, ε), telles que

$$\mathrm{P}(\sup_{t\in[0,T]} |Z_t^{x,\varepsilon} - z^x(t)| > \delta) \leqslant c_1 \exp\left(-\frac{c_2}{\varepsilon^2}\right).$$

Que peut-on déduire, lorsque $\varepsilon \to 0$?

Exercice II.
Soient $\sigma, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonction boréliennes bornées. On suppose que les processus X et Y sont solutions de l'équation différentielle stochastique

$$dZ_t = \sigma(Z_t)dB_t + b(Z_t)dt, \quad Z_0 = x.$$

1) Montrer que le processus $A_t = \max\{X_t, Y_t\} - X_t + \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s < Y_s\}} d(X_s - Y_s)$, $t \geqslant 0$, est un processus croissant.

2) Montrer que si A est identiquement nul, alors $\max\{X_t, Y_t\}$ est aussi une solution de l'équation différentielle stochastique précédente.

3) On continue à supposer A identiquement nul. Montrer que s'il y a unicité en loi pour l'équation différentielle stochastique alors X et Y sont indistinguables.

Exercice III.
Soient $\sigma, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonction boréliennes bornées. Résoudre l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = \sigma(t)X_t dB_t + b(t)X_t dt, \quad X_0 = x.$$

Que vaut $\lim_{t\to\infty} X_t$ quand σ et b sont constantes ?