Processus stochastiques continus : devoir maison no. 4

- à rendre pour le **28 novembre 2008** -

On se place dans un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathrm{P})$ satisfaisant les "conditions habituelles". Soit $\{(B_t^1, B_t^2)\}_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien bi-dimensionnel issu de 0.

Exercice I.

1. Que vaut $\int_0^t B_s^1 \mathbb{1}_{\{(B_s^1,B_s^2)=(0,0)\}} dB_s^1$ ($t \geqslant 0$ quelconque) ?
2. On note $A_t := (B_t^1)^2 + (B_t^2)^2$. Montrer que A satisfait à l'équation différentielle stochastique
$$dA_t = 2\sqrt{A_t}\, d\beta_t + 2\, dt, \quad A_0 = 0, \tag{1}$$
où β est un mouvement brownien réel.
3. Dans la suite on admettra que A est une solution forte de l'équation (1). On note $Z_t := \int_0^t B_s^1 dB_s^2 - \int_0^t B_s^2 dB_s^1$. Montrer qu'il existe un mouvement brownien réel γ, indépendant de β, tel que $Z_t = \gamma(\int_0^t A_s ds)$. En déduire que les processus γ et $\{\int_0^t A_s ds\}_{t\geqslant 0}$ sont indépendants.
4. Montrer que $\mathrm{E}[e^{iuZ_1}] = \mathrm{E}\{\exp(-\frac{u^2}{2}\int_0^1 A_s ds)\} = [\mathrm{E}\{\exp(-\frac{u^2}{2}\int_0^1 (B_s^1)^2 ds)\}]^2$.
On pourra conditionner d'abord par rapport à la tribu $\sigma(A_s : s \leqslant 1)$.
5. Utiliser le résultat de l'exercice DM2-I-3 pour déduire que $\mathrm{E}[e^{iuZ_1}] = \frac{1}{\cosh(u)}$, $u \in \mathbb{R}$.

Exercice II.

1. On considère l'équation différentielle stochastique de l'exercice DM1-I
$$dX_t = \sqrt{1 + X_t^2}\, d\beta_t + (a + {}^{X_t}\!/_2)\, dt, \quad X_0 = 0,$$
avec β un mouvement brownien réel standard β et $a \in \mathbb{R}$. Justifier l'existence et l'unicité trajectorielle de cette équation.
2. Soit une deuxième équation différentielle stochastique
$$dY_t = d\gamma_t + ({}^{a}\!/_{\cosh(Y_t)})\, dt, \quad Y_0 = 0$$
avec γ un autre mouvement brownien réel standard. Justifier l'existence et l'unicité trajectorielle de cette équation.
3. Montrer que les processus $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ et $\{\sinh(Y_t)\}_{t\geqslant 0}$ ont la même loi. On pourra rechercher quelle équation différentielle stochastique satisfait $\sinh(Y_t)$ et utiliser un théorème d'unicité en loi.
4. Prouver l'égalité en loi suivante : $e^{B_1^1}\int_0^1 e^{-B_s^1} dB_s^2 \sim \int_0^1 e^{B_s^1} dB_s^2$. On pourra utiliser le fait qu'une intégrale stochastique est limite en probabilité d'une somme de Riemann.
5. En déduire des deux points précédents l'égalité en loi : $\int_0^1 e^{B_s^1} dB_s^2 \sim \sinh(B_1^1)$.