Processus stochastiques continus : devoir maison no. 3

- à rendre pour le **21 novembre 2008** -

On se place dans un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathrm{P})$ satisfaisant les "conditions habituelles". On note $\{B_t; t \geqslant 0\}$ un mouvement brownien réel issu de 0 et dans les deux exercices $\mathrm{sgn}(x) := \mathbb{1}_{x>0} - \mathbb{1}_{x\leqslant 0}$.

Exercice I.
Soit $X_t = X_0 + M_t + A_t$, $t \geqslant 0$, une semimartingale continue. On suppose qu'il existe une constante positive c telle que $\sup_{t\geqslant 0} |M_t| + \langle M\rangle_\infty + \int_0^\infty |dA_s| \leqslant c$ p.s.

1. Soit $\phi : \mathbb{R} \to [-1,1]$ de classe C^∞, telle que $\phi(x) = -1$ si $x \leqslant 0$ et $\phi(x) = 1$ si $x \geqslant 1$. Pour $n \geqslant 1$ entier soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f_n(0) = 0$ et $f_n'(x) = \phi(nx)$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout n, $\{f_n(X_t) : t \geqslant 0\}$ est une semimartingale continue et trouver sa décomposition.
2. Montrer que, $\lim_{n\to\infty} \sup_{t\geqslant 0} \left| \int_0^t [\mathrm{sgn}(X_s) - f_n'(X_s)] dM_s \right| = 0$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathrm{P})$

   et que $\lim_{n\to\infty} \sup_{t\geqslant 0} \left| \int_0^t [\mathrm{sgn}(X_s) - f_n'(X_s)] dA_s \right| = 0$ p.s.
3. On note $Z_t := |X_t| - |X_0| - \int_0^t \mathrm{sgn}(X_s) dX_s$, $t \geqslant 0$. Utiliser les questions précédentes pour montrer que Z est un processus croissant. En déduire que $|X|$ est une semimartingale continue et calculer sa variation quadratique.

Exercice II.
On pose $A_t := |B_t| - \int_0^t \mathrm{sgn}(B_s) dB_s$, $t \geqslant 0$.

1. Pourquoi $\{A_t : t \geqslant 0\}$ est un processus croissant et $\{|B_t| : t \geqslant 0\}$ est une semimartingale ?
2. Montrer que $\int_0^t \mathbb{1}_{\{B_s=0\}} dB_s = 0$ et que $A_t = \int_0^t \mathbb{1}_{\{B_s=0\}} d|B_s|$.
3. Montrer que $\{|B_t|^{1/3}; t \geqslant 0\}$ n'est pas une semimartingale. On pourra supposer le contraire et calculer A_t.
4. Soit $\tau := \inf\{t \geqslant 0 : |B_t| > 1\}$ et on veut trouver la loi de A_τ. On pourra suivre le raisonnement suivant :
   (a) pour $\lambda > 0$ montrer que la semimartingale $\{(|B_t| + \frac{1}{\lambda}) e^{-\lambda A_t} : t \geqslant 0\}$ est une martingale locale continue ; on pourra utiliser le résultat du point 2 précédent.
   (b) montrer que $\{(|B_{t\wedge\tau}| + \frac{1}{\lambda}) e^{-\lambda A_{t\wedge\tau}} : t \geqslant 0\}$ est une vraie martingale unifomément intégrable et en déduire l'expression de $\mathrm{E}(e^{-\lambda A_\tau})$.
5. Comment retrouver la conclusion du point 3 à l'aide du résultat du point 4 ?