Processus stochastiques continus : devoir maison no. 2

- à rendre pour le **14 novembre 2008** -

On se place dans un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathrm{P})$ satisfaisant les "conditions habituelles". Dans les deux exercices $\{B_t; t \geqslant 0\}$ un mouvement brownien réel issu de $a \in \mathbb{R}$.

Exercice I.
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue. On suppose qu'il existe une fonction $u : [0,1] \to (0,1]$ de classe C^2 telle que $u'' = fu$ sur $(0,1)$, $\quad u(0) = 1$, $u'(T) = 0$.

1. On pose, pour $t \in [0,1]$,

$$v(t) := \frac{u'(t)}{u(t)} \text{ et } M_t := \exp\left\{\frac{1}{2}\left[v(t)B_t^2 - a^2u'(0) - \int_0^t f(s)B_s^2 ds - \int_0^t v(s)ds\right]\right\}.$$

   Montrer que M est une martingale locale. On pourra montrer qu'il s'agit de la martingale exponentielle associée à $\frac{1}{2}\int_0^t v(s)dW_s$, où $W_t := B_t^2 - t$.

2. Montrer que

$$\mathrm{E}\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^1 f(s)B_s^2 ds\right\}\right] = \sqrt{u(1)}\exp\left\{\frac{a^2}{2}u'(0)\right\}.$$

3. Supposons $a = 0$ et on note $\xi := \int_0^1 B_s^2 ds$. Calculer, la transformée de Laplace de ξ, $\mathrm{E}\left[e^{-\lambda\xi}\right]$, pour $\lambda \geqslant 0$. On pourra utiliser le résultat du point précédent.

Exercice II.
On suppose que B est issu de $a = 0$.

1. Soit $\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}dt$, $x \in \mathbb{R}$, la fonction de répartition de B_1. Montrer que, pour tout $x > 0$, $1 - \Phi(x) \leqslant \frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}$ et que si l'on note $\gamma(x) := \Phi'(x)$, alors $\gamma'(x) = -x\gamma(x)$.

2. Soit $T > 0$ un temps déterministe fixé. Montrer que le processus

$$M_t := \Phi\left(\frac{B_t}{\sqrt{T-t}}\right)$$

   est une martingale sur $[0,T]$. On pourra exprimer M_t à l'aide d'une intégrale stochastique et déduire $\mathrm{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) = M_s$ pour tous $s < t < T$; ensuite on pourra calculer $\lim_{t\to T} M_t$ et passer à la limite dans l'égalité précédente.