Processus stochastiques continus : devoir maison no. 1

- à rendre pour le **7 novembre 2008** -

On se place dans un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathrm{P})$ satisfaisant les "conditions habituelles".

Exercice I.
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{B} = (B^1, B^2)$ un mouvement brownien bi-dimensionnel issu de 0. On pose

$$X_t := e^{B_t^1} \left(\int_0^t e^{-B_s^1} dB_s^2 + a \int_0^t e^{-B_s^1} ds \right), \quad t \geqslant 0.$$

Montrer qu'il existe un mouvement brownien réel β tel que

$$X_t = \int_0^t \sqrt{1 + X_s^2}\, d\beta_s + \int_0^t \left(a + \frac{X_s}{2} \right) ds, \quad t \geqslant 0.$$

Exercice II.
Soit B un mouvement brownien réel issu de 0. Soit τ un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt et on introduit le processus $W_t := 2B_{t\wedge\tau} - B_t$, $t \geqslant 0$. Montrer que le processus $\mathbb{1}_{[0,\tau]}(\cdot)$ est progressif, que $W_t = \int_0^t (2\mathbb{1}_{[0,\tau]}(s) - 1) dB_s$, $t \geqslant 0$, et que W est un mouvement brownien.