Master Mathématiques 1ère année
Séries Temporelles : 2006-2007
DS2 - le 22 mai 2007
durée 1 heure - documents et calculatrice autorisés

DS2-1. (7 points)
Soit le filtre linéaire suivant $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j Z_{t-j}$, avec $\{Z_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$, $t \in \mathbb{Z}$.

(a) Sous quelle hypothèse ce processus est bien défini et préciser dans quel sens ?

(b) Montrer qu'on peut écrire une équation remarquable pour ce processus.

(c) Calculer $\rho(1)$. Donner l'expression de l'estimateur $\widehat{\rho}(1)$.

(d) Supposons que $\{Z_t\} \sim \mathrm{IID}(0, \sigma^2)$. Montrer que sous l'hypothèse du point (a), on a $\widehat{\rho}(1) \approx \mathcal{N}\left(\rho(1), 2\dfrac{1-\rho(1)^2}{n}\right)$.

(e) Construire un intervalle de confiance pour ϕ de coefficient de sécurité 95% lorsque $n = 100$ et $\widehat{\rho}(1) = 0.64$.

(f) L'estimateur $\widehat{\rho}(1)$ est-il consistant ? Le cas échéant donner la limite.

DS2-2. (8 points)
Soit la série temporelle MA(1), $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$, $t \in \mathbb{Z}$, avec $\{Z_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$ et $|\theta| < 1$.

(a) Montrer que le modèle est de la forme AR(∞), $X_t = -\sum_{j=1}^{\infty} (-\theta)^j X_{t-j} + Z_t$, $t \in \mathbb{Z}$.

(b) On veut utiliser cette représentation pour déduire les équations de Yule-Walker associées à ce modèle. Multiplier l'équation précédente par $X_t, X_{t-1}, \ldots$ et prendre l'espérance. Combien d'équations peut-on écrire ?

(c) En déduire une relation entre θ et la fonction d'autocorrélation. Donner ensuite l'estimateur par métode des moments pour θ.

(d) Sous quelle condition sur $\widehat{\rho}(1)$ peut-on déduire une estimation de θ ? Trouver l'unique estimation $\widetilde{\theta}$ qui rend le modèle MA(1) ajusté inversible ?

(e) On suppose que $\{Z_t\} \sim \mathrm{IID}(0, \sigma^2)$. Montrer, en utilisant la formule de Bartlett, que pour l'estimateur précédent on a $\widetilde{\theta} \approx \mathcal{N}\left(\theta, 2\dfrac{1+\theta^2+4\theta^4+\theta^6+\theta^8}{n(1-\theta^2)^2}\right)$.

(f) On note $\widehat{\theta}$ l'estimateur du maximum de vraisemblance pour ce modèle. Donner la loi asymptotique de $\widehat{\theta}$.

(g) Comparer les variances aymptotiques de $\widetilde{\theta}$ et $\widehat{\theta}$. Application : $\theta = 0.5$.