Master 2 Recherche 2005-2006

Martingales et intégration stochastique

DM5 - intégrale stochastiques et formule d'Itô

DM5-1. Soit B un mouvement brownien réel issu de 0.

1. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et on note $H(g)_t := \int g(s)B_s ds$. Montrer que $H(g)_t$ est une v.a. centrée de carré intégrable et que :
$\mathbb{E}\left[H(g)_t^2\right] = 2\mathbb{E}\iint_{0\leqslant u<s\leqslant t} g(u)B_u g(s)B_s du\, ds = 2\iint_{0\leqslant u<s\leqslant t} ug(u)g(s)du\, ds.$
En déduire que, si $G(x) := \int_0^x g(t)dt$, alors
$\mathbb{E}\left[H(g)_t^2\right] = \int_0^t G(s)^2 ds + tG(t)^2 - 2G(t)\int_0^t G(s)ds.$
2. Soit $0 < \frac{1}{n}t < \ldots < \frac{n-1}{n}t < t$ une division de l'intervalle $[0,t]$. Utiliser l'approximation de $H(g)_t$ par des sommes de Riemann pour évaluer la fonction caractéristique de $H(g)_t$. En déduire que la loi de $H(g)_t$ est gaussienne et préciser les paramètres.
3. Justifier que le couple $(B_t, H(g)_t)$ est un couple gaussien (on pourra utiliser la même idée que dans le point précédent) et que $\mathbb{C}\mathrm{ov}(B_t, H(g)_t) = tG(t) - \int_0^t G(s)ds$.
4. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et on pose $I(f)_t := f(t)B_t - \int_0^t f'(s)B_s ds$. Déduire des questions précédentes que $\{I(f)_t : t \geqslant 0\}$ est un processus continu et que pour tout $t > 0$, $I(f)_t$ est une v.a. gaussienne centrée de variance $\int_0^t f(s)^2 ds$.
5. Utiliser l'approximation de l'intégrale stochastique par des sommes de Riemann pour montrer que $\int_0^t f(s)dB_s = I(f)_t$. L'intégrale stochastique $X_t = \int_0 f(s)dB_s$ peut être définie pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$.
6. Montrer que pour $f \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ le processus X est un processus gaussien et calculer sa covariance $\Gamma(s,t)$. Montrer que $\exp(X_t - \frac{1}{2}\Gamma(t,t))$ est une martingale.

DM5-2. Soit M une m.l.c. issue de 0 et telle que $\langle M\rangle$ est déterministe. Montrer que M est une martingale gaussienne et qu'elle est à accroissements indépendants. On pourra s'inspirer de la preuve du théorème de Lévy.

DM5-3. Soit M une m.l.c. telle que la mesure $d\langle M\rangle_t$ est p.s. équivalente à la mesure de Lebesgue.

1. Justifier (ou admettre) l'existence de la limite $f_t := \lim_{n\to\infty} n(\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_{t-1/n})$, qui est strictement positive $dt \otimes dP$-p.p. et que $d\langle M\rangle_t = f_t dt$.
2. Justifier l'existence de l'intégrale $B_t = \int_0^t f_s^{-1/2} dM_s$ et montrer que B est un $(\mathcal{F}_t^M)$-mouvement brownien réel.
3. En déduire une représentation brownienne de M.

DM5-4. Soit B un mouvement brownien d-dimensionnel issu de $x \in \mathbb{R}^d$. Nous désignons pour une fonction régulière $u = u(t,x)$, $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $\Delta u = \partial^2_{x_1x_1} u + \ldots + \partial^2_{x_dx_d} u$.

1. Supposons que $u \in \mathrm{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$ et que
$$\partial_t u = \frac{1}{2}\Delta u \ \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d. \tag{1}$$
Montrer que pour tout $t > 0$, $\{M_s := u(t-s, B_s) : s \geqslant 0\}$ est une m.l.c.

2. Supposons qu'il existe une solution u bornée de (1) telle que

$$u(0,x) = f(x) \text{ sur } \{0\} \times \mathbb{R}^d \tag{2}$$

où $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est continue. Justifier l'existence p.s. de la $\lim_{s\uparrow t} M_s$ et la calculer. Prouver que la solution régulière bornée u de (1)+(2) est égale à $v(t,x) := \mathbb{E}_x f(B_t)$.

3. Supposons que f est bornée et que $v \in \mathrm{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$. Justifier que $\mathbb{E}_x[f(B_t) \mid \mathcal{F}_s^B] = v(t-s, B_s)$ et que cette quantité est une martingale. Utiliser la formule d'Itô pour montrer que $\int_0^t (-\partial_t v + \frac{1}{2}\Delta v)(t-r, B_r)dr$ est à la fois une m.l.c. et un processus à variation finie. En déduire que v satisfait à l'équation (1).

4. Justifier brièvement que si f est bornée alors $v \in \mathrm{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$. On pourra utiliser le noyau de transition du mouvement brownien $p_t(x,y) = (2\pi t)^{-d/2} e^{-|x-y|^2/2t}$.

5. Montrer que si f est bornée et continue alors v satisfait aussi (2). On pourra utiliser deux suites $t_n \to 0$ et $x_n \to x$ et utiliser la convergence dominée ainsi que la loi de $B_t - B_0$ pour calculer la limite de $v(t_n, x_n)$.

DM5-5. Soit B un mouvement brownien d-dimensionnel issu de $x \in \mathbb{R}^d$. Nous désignons pour une fonction régulière $u = u(x)$, $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $\Delta u = \partial^2_{x_1 x_1} u + \ldots + \partial^2_{x_d x_d} u$. Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné.

1. On pose $T := \inf\{t > 0 : B_t \notin D\}$. Justifier que T est un temps d'arrêt. Soit $K := \mathrm{diam}(D)$. Montrer que $\mathbb{P}_x(T < 1) \geqslant \mathbb{P}_0(|B_1| > K) =: \rho_K > 0$. En déduire, par récurrence sur n, que $\mathbb{P}_x(T \geqslant n) \leqslant (1-\rho_K)^n$, $n \geqslant 1$. On pourra utiliser la propriété de Markov du mouvement brownien. Conclure que $\mathbb{P}_x(T < \infty) = 1$, pour tout x.

2. Supposons que $u \in \mathrm{C}^2(D)$ et que

$$\Delta u = 0 \text{ dans } D \tag{3}$$

Montrer que $\{M_t := u(B_t) : t \in [0,T)\}$ est une m.l.c.

3. Supposons qu'il existe une solution u bornée de (3) telle que

$$u(x) = f(x) \text{ sur } \partial D \tag{4}$$

où $f : D \to \mathbb{R}$ est continue. Justifier l'existence p.s. de la $\lim_{t\uparrow T} M_t$ et la calculer. Prouver que la solution régulière bornée u de (3)+(4) est égale à $v(x) := \mathbb{E}_x f(B_T)$.

4. Supposons que f est bornée et que $v \in \mathrm{C}^2(D)$. Justifier que $\mathbb{E}_x[f(B_T) \mid \mathcal{F}_s^B] = v(B_s)$ sur $\{T > s\}$ et que cette quantité est une martingale sur $[0,T)$. Utiliser la formule d'Itô pour montrer que $\frac{1}{2}\int_0^t \Delta v(B_r)dr$ est à la fois une m.l.c. et un processus à variation finie. En déduire que v satisfait à l'équation (3).

5. On admet le résultat suivant : si f est bornée alors $v \in \mathrm{C}^2(D)$.

6. Un point $y \in \partial D$ est dit *régulier* si $\mathbb{P}_y(T = 0) = 1$. On admet le résultat suivant : si f est bornée et continue et si tout point de ∂D est régulier, alors v satisfait aussi (4).