Master 2 Recherche 2005-2006
Martingales et intégration stochastique
DM4 - martingales et martingales locales

DM4-1. Soit $\{B_t : t \geqslant 0\}$ un mouvement brownien standard et soit $\{\mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ sa filtration naturelle. On pose $M_t^\alpha := \exp(\alpha B_t - \alpha^2 t/2)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) et pour $t > 0$, $S_t := \sup_{s \leqslant t} B_s$.

1. Montrer que $\{(M_t^\alpha, \mathcal{F}_t) : t \geqslant 0\}$ est une martingale. Écrire l'inégalité maximale sur $[0,t]$ ($t > 0$ quelconque).
2. Montrer que pour $\alpha > 0$, $\exp(\alpha S_t - \alpha^2 t/2) \leqslant \sup_{s \leqslant t} M_s^\alpha$.
3. Utilisez les points précédents pour déduire que, pour $a > 0$, $\mathbb{P}(S_t > at) \leqslant \exp(-a^2 t/2)$.
4. Soit $\{\mathbf{B}_t : t \geqslant 0\}$ un mouvement brownien d-dimensionnel standard (c'est-à-dire, que ses composantes sont d mouvements browniens 1-dimensionnels indépendants). Montrer que $\mathbb{P}(\sup_{s \leqslant t} |\mathbf{B}_s| \geqslant \delta) \leqslant 2d \exp(-\delta^2/2dt)$.

DM4-2. Soit $\{B_t : t \geqslant 0\}$ un mouvement brownien standard et $a > 0$ fixé. On pose $T_a := \inf\{t > 0 : B_t = a\}$ et $\tilde{T}_a := \inf\{t > 0 : |B_t| = a\}$. On sait, par continuité des trajectoires, que $T_a = \inf\{t > 0 : B_t \geqslant a\}$ et $\tilde{T}_a = \inf\{t > 0 : |B_t| \geqslant a\}$.

1. Montrer que $\{M_{t \wedge T_a}^\alpha : t \geqslant 0\}$ est une martingale bornée ($\alpha \geqslant 0$).
2. En déduire, par le théorème d'arrêt, la valeur de $\mathbb{E}[\exp(-\lambda T_a)]$.
3. Montrer que $N_t^\alpha := (M_t^\alpha + M_t^{-\alpha})/2$ est une martingale et lui trouver son expression.
4. Montrer que $N_{t \wedge \tilde{T}_a}^\alpha$ est bornée et déduire la valeur de $\mathbb{E}[\exp(-\lambda \tilde{T}_a)]$.
5. En considérant la martingale $B_t^2 - t$ et les t.a. $\tilde{T}_a \wedge n$, prouver que $\tilde{T}_a \in \mathrm{L}^1$. Calculer $\mathbb{E}[\tilde{T}_a]$. Donner une justification simple du fait que $T_a \notin \mathrm{L}^1$.

DM4-3. Soient M et N deux martingales locales continues et $\{\mathbf{B}_t := (B_t^1, \ldots, B_t^d) : t \geqslant 0\}$ un mouvement brownien d-dimensionnel standard.

1. Montrer que $\langle M, N \rangle = (1/4)[\langle M + N \rangle - \langle M - N \rangle]$.
2. Montrer que les processus suivants sont des mouvements browniens 1-dimensionnels $(B^i + B^j)/\sqrt{2}$ et $(B^i - B^j)/\sqrt{2}$. En déduire par le premier point que $\langle B^i, B^j \rangle = \delta_{ij} t$ (δ_{ij} est le symbole de Kronecker).
3. Supposons que M et N sont indépendantes (c'est-à-dire que les tribus $\sigma(M_s : s \geqslant 0)$ et $\sigma(N_s : s \geqslant 0)$ sont indépendantes). Montrer que $\langle M, N \rangle = 0$. On pourra d'abord supposer que M et N sont martingales bornées.
4. Utiliser le point précédent pour retrouver le fait que $\langle B^i, B^j \rangle = \delta_{ij} t$.

DM4-4. Les trois questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit M une martingale de carré intégrable qui est un processus à accroissements indépendants et stationnaires. Montrer que $\langle M \rangle$ est déterministe et calculer son expression.
2. Soit M une martingale continue qui est aussi un processus gaussien. Montrer que le processus $\langle M \rangle$ est déterministe (c'est-à-dire qu'il y a une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $\langle M \rangle_t = f(t)$ p.s.)
3. Soit M une martingale locale continue et soit T un temps d'arrêt borné. On pose $N_t := M_{T+t}$. Montrer que N est une martingale locale et calculer $\langle N \rangle$ en fonction de $\langle M \rangle$.