Master 2 Recherche 2005-2006
Martingales et intégration stochastique
DM3 - Martingales en temps continu

DM3-1. Soient $\{(X_t, \mathcal{F}_t) : t \geqslant 0\}$ une sousmartingale continue à droite uniformément intégrable et $S \leqslant T$ deux temps d'arrêt. Alors :

1. $\{(X_t^T, \mathcal{F}_t) : t \geqslant 0\} := \{(X_{T\wedge t}, \mathcal{F}_t) : t \geqslant 0\}$ est une sousmartingale uniformément intégrable.
2. $\mathbb{E}(X_{T\wedge t} \mid \mathcal{F}_S) = \mathbb{E}(X_t^T \mid \mathcal{F}_S) \geqslant X_t^S = X_{S\wedge t}$, $\forall t \geqslant 0$.

DM3-2. Soit $\{(X_t, \mathcal{F}_t) : t \geqslant 0\}$ une sousmartingale continue à droite telle que $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0)$, $\forall t \geqslant 0$. Montrer que $\{(X_t, \mathcal{F}_t) : t \geqslant 0\}$ est une martingale.

DM3-3. Montrer qu'un processus continu à droite $\{(X_t, \mathcal{F}_t) : t \geqslant 0\}$ avec $\mathbb{E}|X_t| < \infty$, $\forall 0 \leqslant t < \infty$, est une sousmartingale si et seulement si, pour toute paire $S \leqslant T$ de $\{\mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$-temps d'arrêt bornés on a $\mathbb{E}(X_S) \leqslant \mathbb{E}(X_S)$.

DM3-4. Soit $\{(X_t, \mathcal{F}_t) : t \geqslant 0\}$ une martingale continue positive avec $X_\infty := \lim_{t\to\infty} X_t = 0$ $\mathbb{P}$-p.s. Montrer que :

$$\mathbb{P}(\sup_{t>s} X_t \geqslant a \mid \mathcal{F}_s) = {}^{X_s}/_{a} \text{ sur } \{X_s < b\}.$$

On pourra poser $T = \inf\{t \geqslant s : X_t = a\}$, décomposer la quantité, $\mathbb{E}\left[X_s \mathbb{1}_{A\cap\{X_s<a\}}\right]$ $(A \in \mathcal{F}_s)$ sur $\{T \leqslant t\}$ et son contraire (pour $t \geqslant s$), et utiliser la convergence dominée. Déduire de la première inégalité

$$\mathbb{P}(\sup_{t>s} X_t \geqslant a) = \mathbb{P}(X_s \geqslant a) + \frac{1}{a}\mathbb{E}\left[X_s \mathbb{1}_{\{X_s<a\}}\right].$$