Master 2 Recherche 2005-2006

Martingales et intégration stochastique

DM2 - identité de Wald

DM2-1. Soit $\{Y_n : n \geqslant 1\}$ une suite de v.a. i.i.d. qui ne sont pas p.s. constantes et on pose $X_0 = 0$, $X_n = \sum_{i=}^{n} Y_i$, $n \geqslant 1$, $\mathcal{B}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{B}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n) = \sigma(X_0, \dots, X_n)$. Soit

$$\phi(u) := \ln \mathbb{E}[\exp(uY_1)],\ u \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que ϕ est convexe.
   En déduire que l'ensemble $\{u : \phi(u) < \infty\}$ est un intervalle contenant 0.
   Si on suppose que $\mathrm{int}\{u : \phi(u) < \infty\} \neq \emptyset$, montrer que ϕ est infiniment dérivable sur cet intérieur. Calculer $\phi'(0)$ et $\phi''(0)$.
   Remarquons que sur $\{u : \phi(u) < \infty\}$, ϕ est strictement convexe et ϕ' est strictement croissante.
2. Pour $u \in \{\phi(u) < \infty\}$ nous définissons
   $$M_n(u) := \exp\{uX_n - n\phi(u)\}.$$
   Montrer que $\{(M_n(u), \mathcal{B}_n) : n \geqslant 0\}$ est une martingale positive avec $\mathbb{E}(M_n(u)) = 1$.
3. Montrer que $\phi(u/2) = \phi(u)/2$.
   Justifier que $\{M_n(u/2)\}$ est une martingale convergente p.s. vers une v.a. Z.
   Écrire $M_n(u) = \exp\{uX_n - 2n\phi(u/2) + n[2\phi(u/2) - \phi(u)]\}$ et utiliser la convergence p.s. de $\{M_n(u/2)^2\}$ pour déduire que $M_n(u)$ converge p.s. vers 0.
   Cette martingale est-elle régulière ?
4. Soit $u \in \{\phi(u) < \infty\}$ et on suppose $\phi'(u) \geqslant 0$.
   On introduit, pour $a > 0$, $T_a^+ := \inf\{n : X_n \geqslant a\}$. On veut montrer que ce t.a. est régulier pour la martingale $\{(M_n(u), \mathcal{B}_n) : n \geqslant 0\}$.
   Par conséquent, tout t.a. $T \leqslant T_a^+$ est régulier et l'identité de Wald a lieu
   $$1 = \mathbb{E}[M_0(u)] = \mathbb{E}[M_T(u)] = \mathbb{E}\left[e^{uX_T} \cdot e^{-\phi(u)T}\right] \tag{1}$$
   (a) Montrer que la condition *jjj)* de la dernière proposition du cours est satisfaite. Il reste à vérifier la condition *jv)* de la même proposition, $\lim_{n\to 0} \mathbb{E}[M_n(u)\mathbb{1}_{\{T_a^+ > n\}}] = 0$.
   (b) On admet le résultat suivant concernant les marches aléatoires : soit $\{\xi_i : n \geqslant 1\}$ une suite de v.a. i.i.d. telles que $\mathbb{E}(\xi_i) \geqslant 0$. Alors $\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \xi_i = +\infty$ et ainsi si $S_a^{(\xi)} := \inf\{n : \sum_{i=1}^{n} \xi_i \geqslant a\}$, alors $S_a^{(\xi)} < \infty$ p.s. et $\mathbb{P}(S_a^{(\xi)} > n) \to 0$.
   (c) Notons la loi commune des Y_i par $\mathbb{Q}$ et on définit les variables $Y_i^{\#}$ i.i.d. de loi
   $$\mathbb{Q}^{\#}(B) = \int_B e^{uy - \phi(u)} \mathbb{Q}(dy),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$
   Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité. Que vaut $\mathbb{E}(Y_1^{\#})$?
   (d) Combiner les précédents points pour vérifier $\lim_{n\to 0} \mathbb{E}[M_n(u)\mathbb{1}_{\{T_a^+ > n\}}] = 0$.
5. Soient $b < 0 < a$ et $u \in \{\phi(u) < \infty\}$.
   On introduit $T_{a,b} := \inf\{n : X_n \geqslant a \text{ ou } X_n \leqslant y\}$. Montrer que si $\phi'(u) \geqslant 0$, alors $T_{a,b}$ est régulier pour la martingale $\{M_n(u)\}$.
   Que pensez vous du cas $\phi'(u) \leqslant 0$?