Master 2 Recherche 2005-2006
Martingales et intégration stochastique
DM1 - martingales discrètes

DM1-1. Soit $\{(X_n, \mathcal{B}_n) : n \geqslant 0\}$ une martingale telle que $\mathbb{E}(X_n^2) < \infty$, $\forall n$. Montrer que, pour $n \leqslant m \leqslant r$, $\mathbb{E}[(X_r - X_m)X_n] = 0$ et $\mathbb{E}[(X_r - X_m)^2 \mid \mathcal{B}_n] = \mathbb{E}[X_r^2 \mid \mathcal{B}_n] - \mathbb{E}[X_m^2 \mid \mathcal{B}_n]$. Supposons qu'il existe K telle que $\mathbb{E}(X_n^2) < K$, $\forall n$. Montrer que la suite $\{X_n\}$ converge dans L^2.

DM1-2. Soit $\{(X_n, \mathcal{B}_n) : n \geqslant 0\}$ une martingale et supposons qu'il existe une suite $K_1, K_2, \ldots,$ de réels telle que $\mathbb{P}(|X_n - X_{n-1}| \leqslant K_n) = 1$, $\forall n$. On veut démontrer l'inégalité suivante

$$\mathbb{P}(|X_n - X_0| \geqslant a) \leqslant 2\exp\left(\frac{-\frac{1}{2}a^2}{\sum_{i=1}^n K_i^2}\right),\ a > 0. \tag{1}$$

1. Montrer que, si $\lambda > 0$ et $|s| \leqslant 1$, $e^{\lambda s} \leqslant \frac{1}{2}(1-s)e^{-\lambda} + \frac{1}{2}(1+s)e^{\lambda}$.
2. Soit D une v.a. centrée telle que $|D| \leqslant 1$ p.s. Montrer que $\mathbb{E}[e^{\lambda D}] \leqslant \frac{1}{2}(e^{-\lambda} + e^{\lambda}) < e^{\frac{\lambda^2}{2}}$.
3. En utilisant l'inégalité précédente avec $D_n = X_n - X_{n-1}$, $n \geqslant 1$, montrer que pour $\theta > 0$ quelconque :
$$\mathbb{E}\left(e^{\theta(X_n - X_0)} \mid \mathcal{B}_{n-1}\right) \leqslant e^{\theta(X_{n-1} - X_0)} e^{\frac{1}{2}\theta^2 K_n^2}.$$
En déduire
$$\mathbb{E}\left(e^{\theta(X_n - X_0)}\right) \leqslant \exp\left(\frac{1}{2}\theta^2 \sum_{i=1}^n K_i^2\right)$$
et
$$\mathbb{P}(X_n - X_0 \geqslant a) \leqslant \exp\left(-\theta a + \frac{1}{2}\theta^2 \sum_{i=1}^n K_i^2\right).$$
4. En déduire l'inégalité (1).

DM1-3. Soit $\{(X_n, \mathcal{B}_n) : n \geqslant 0\}$ une martingale. On veut démontrer les inégalités suivantes

$$\mathbb{P}(\max_{0 \leqslant m \leqslant n} X_m \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X_n^+)}{a} \text{ et } \mathbb{P}(\max_{0 \leqslant m \leqslant n} |X_m| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X_n|)}{a},\ a > 0 \tag{2}$$

On note $T_a = \inf\{m : X_m \geqslant a\}$. Appliquer le théorème d'arrêt à $T \wedge n$ et à la martingale $\{X_n\}$ et déduire les inégalités (2). Montrer que si $\{(X_n, \mathcal{B}_n) : n \geqslant 0\}$ est une sousmartingale,

$$\mathbb{P}(\max_{0 \leqslant m \leqslant n} X_m \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X_n^+)}{a},\ a > 0$$

et si $\{(X_n, \mathcal{B}_n) : n \geqslant 0\}$ est une surmartingale positive,

$$\mathbb{P}(\max_{0 \leqslant m \leqslant n} X_m \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X_0)}{a},\ a > 0.$$