Problème C du 28 octobre 2006

Agrégation de Mathématiques - Analyse et Probabilités

(Mihai Gradinaru)

Soit $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable (c'est-à-dire que $\mathcal{B}$ est une tribu sur E). On notera par $B(E;\mathbb{R})$ l'espace des fonctions définies sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$, bornées et $\mathcal{B}$-mesurables et par $\mathbf{M}_1(E)$ l'espace des mesures de probabilité sur $(E, \mathcal{B})$. La dualité entre ces deux espaces est donnée par

$$\langle \varphi, \mu \rangle := \int_E \varphi d\mu, \text{ pour } \varphi \in B(E;\mathbb{R}) \text{ et } \mu \in \mathbf{M}_1(E).$$

La norme uniforme d'une fonction $\varphi \in B(E;\mathbb{R})$ sera notée $\|\varphi\|_u := \sup_{x\in E} |\varphi(x)|$.

Lorsque (E, ρ) est un espace métrique séparable on prendera la tribu $\mathcal{B} = \mathcal{B}(E)$ la tribu borélienne. On notera par $C_b^\rho(E;\mathbb{R})$ l'espace des fonctions définies sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$, ρ-continues et bornées. Pour simplifier on supposera de plus que (E, ρ) est un espace complet, bien qu'une partie des résultats sont vraies en général.

Première partie

Dans cette partie on étudie la **topologie uniforme** et la **topologie forte** sur l'espace $\mathbf{M}_1(E)$.

1. Pour $\mu, \nu \in \mathbf{M}_1(E)$ on définit :

$$\|\nu - \mu\|_{\text{var}} := \sup\{|\langle \varphi, \nu\rangle - \langle \varphi, \mu\rangle| : \varphi \in B(E;\mathbb{R}) \text{ avec } \|\varphi\|_u \leqslant 1\}.$$

Montrer qu'il s'agit d'une métrique (**la métrique variation**) sur $\mathbf{M}_1(E)$ (qui donne la topologie uniforme sur cet espace).

2. Soient $\mu, \nu \in \mathbf{M}_1(E)$ et soit $\lambda \in \mathbf{M}_1(E)$ telle que les deux probabilités μ, ν sont absolument continues par rapport à λ; autrement dit, il existe f, respectivement g, densités de μ, respectivement ν par rapport à λ (un exemple de telle probabilité est $\lambda = \frac{\mu+\nu}{2}$). Montrer que :

$$\|\nu - \mu\|_{\text{var}} = \|g - f\|_{\mathrm{L}^1(\lambda)}.$$

(On pourra utiliser $\varphi = \operatorname{sgn} \circ (g - f)$.)

En particulier $\|\nu - \mu\|_{\text{var}} \leqslant 2$.

3. Montrer que l'espace $\mathbf{M}_1(E)$ muni de la métrique variation est un espace métrique complet. (On pourra associer à la suite de Cauchy $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ la mesure $\lambda = \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu_n}{2^n}$ et utiliser le point précédent.)

4. Supposons que pour tout $x \in E$, $\{x\} \in \mathcal{B}$. On note par δ_x la mesure de Dirac au point x (c'est-à-dire, $\delta_x(A) = \mathbb{1}_A(x)$). Vérifier que $\|\delta_y - \delta_x\|_{\text{var}} = 2$ pour $y \neq x$.

5. La topologie forte de l'espace $\mathbf{M}_1(E)$ est obtenue par la convergence donnée par la dualité : on dit que $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ **converge fortement** vers μ lorsque

Tournez la page S.V.P.

$$\lim_{n\uparrow\infty} \langle \varphi, \mu_n \rangle = \langle \varphi, \mu \rangle, \text{ pour chaque } \varphi \in B(E;\mathbb{R}).$$

Étude d'un exemple : soit $E = [0,1]$ muni de la tribu borélienne et on considère la suite de probabilités $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ de densités (vérifier qu'elles le sont) $f_n(t) = 1 + \cos(n\pi t)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour $m \neq n$, $|\cos(n\pi t) - \cos(m\pi t)| \leqslant 2$ et que

$$\frac{1}{2}\|\mu_n - \mu_m\|_{\text{var}} \geqslant \frac{1}{4}\int_0^1 (\cos(n\pi t) - \cos(m\pi t))^2 dt = \frac{1}{4}.$$

D'autre part, montrer que la suite $\{\sqrt{2}\cos(n\pi t) : n \in \mathbb{N}^*\}$ est orthonormale dans $\mathrm{L}^2(\lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. Soit $\varphi \in B([0,1];\mathbb{R})$. Justifier l'inégalité suivante :

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1 \varphi(t)\cos(n\pi t)dt\right)^2 \leqslant \|\varphi\|^2_{\mathrm{L}^2(\lambda)} \leqslant \|\varphi\|_u^2 < \infty.$$

En déduire que μ_n converge fortement vers λ, lorsque $n \uparrow \infty$.

Deuxième partie

On supposera dans la suite que (E,ρ) est un espace métrique séparable. La **topologie faible** de l'espace $\mathbf{M}_1(E)$ est définie à l'aide de la dualité : on dit que $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ **converge faiblement** vers μ et on note $\mu_n \Rightarrow \mu$, lorsque

$$\lim_{n\uparrow\infty} \langle \varphi, \mu_n \rangle = \langle \varphi, \mu \rangle, \text{ pour chaque } \varphi \in C_b^\rho(E;\mathbb{R}).$$

On veut montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :
i) $\mu_n \Rightarrow \mu$;
ii) pour tout fermé $F \subset E$, $\limsup_{n\uparrow\infty} \mu_n(F) \leqslant \mu(F)$;
iii) pour tout ouvert $G \subset E$, $\mu(G) \leqslant \liminf_{n\uparrow\infty} \mu_n(G)$;
iv) pour tout borélien $B \subset E$ tel que $\mu(\partial B) = 0$, $\lim_{n\uparrow\infty} \mu_n(B) = \mu(B)$ (ici on note par ∂B la frontière de B, c'est-à-dire $\partial B = \overline{B} \setminus B^\circ$).

1. On veut montrer que **i)** implique **ii)**.

  a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $G_k := \{y \in E : \rho(y,F) < \frac{1}{k}\}$. Montrer que la suite d'ensembles $\{G_k : k \in \mathbb{N}^*\}$ est décroissante et que $\lim_k G_k := \cap_{k\in\mathbb{N}^*} G_k = F$.

  b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $\varphi_k(x) := (1 - k\rho(x,F))\mathbb{1}_{G_k}(x)$. Montrer que, les fonctions $\varphi_k : E \to [0,1]$ sont continues et que $\varphi_k(x) = 1$, pour $x \in F$.

  c) Montrer que pour tous $n,k \in \mathbb{N}^*$, $\mu_n(F) \leqslant \langle \varphi_k, \mu_n \rangle$. En déduire que, pour tous $k \in \mathbb{N}^*$, $\limsup_{n\uparrow\infty} \mu_n(F) \leqslant \mu(G_k)$, et enfin trouver **ii)**.

2. Expliquer pourquoi **ii)** est équivalente à **iii)**.

3. Montrer que **ii)** (et donc équivalent **iii)**) implique **iv)**.

4. Enfin on veut montrer que **iv)** implique **i)**.

Tournez la page S.V.P.

a) Soit $\varphi \in C_b^\rho(E;\mathbb{R})$ et on note $M = \|\varphi\|_u$. On définit, pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}$ $\nu(A) := \mu(\varphi^{-1}(A))$. Montrer que $\nu \in \mathbf{M}_1(\mathbb{R})$. Par conséquent l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} : \nu(\{t\}) > 0\}$ est au plus denombrable. On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une division de l'intervalle $[-M, M]$:

$$t_0 \leqslant -M < t_1 < \ldots < t_N < M \leqslant t_{N+1} : t_{k+1} - t_k < \varepsilon \text{ et } \nu(\{t_k\}) = 0, \forall k.$$

b) On note $A_k = \varphi^{-1}([t_k, t_{k+1}[)$, $k = 0, \ldots, N$. Montrer que $\{A_0, \ldots, A_N\}$ est une partition de l'espace E avec $\mu(\partial A_k) = 0$, pour tout $k = 0, \ldots, N$. On pose $\varphi_N(x) := \sum_{k=0}^N t_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$. Montrer que, pour tout $x \in E$, $|\varphi(x) - \varphi_N(x)| < \varepsilon$.

c) Vérifier que :

$$\begin{aligned} &|\langle \varphi, \mu_n \rangle - \langle \varphi, \mu \rangle| \\ \leqslant\ & \langle |\varphi - \varphi_N|, \mu_n \rangle + |\langle \varphi_N, \mu_n \rangle - \langle \varphi_N, \mu \rangle| + \langle |\varphi_N - \varphi|, \mu \rangle \end{aligned}$$

et déduire **i)**.

5. On suppose que pour $\mu, \nu \in \mathbf{M}_1(E)$ on a $\langle \varphi, \mu \rangle = \langle \varphi, \nu \rangle$, $\forall \varphi \in C_b^\rho(E;\mathbb{R})$. Montrer que $\mu = \nu$. On pourra d'abord prendre la suite constante $\mu_n = \mu$ qui converge vers ν et donc, par **iii)** $\nu(G) \leqslant \mu(G)$, pour tout ouvert $G \subset E$ etc.

6. Montrer que la limite faible d'une suite $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ est unique, c'est-à-dire que si $\mu_n \Rightarrow \mu$ et si $\mu_n \Rightarrow \nu$ alors $\mu = \nu$.

7. Soit $E = \mathbb{R}$ et soit la famille $\delta_\alpha : \alpha \in [0, 1[\}$ de probabilités. Montrer que, lorsque $\alpha \uparrow 1$, $\delta_\alpha \Rightarrow \delta_1$. Y a-t-il contradiction avec le fait que $0 = \delta_1(]0, 1[) < 1 = \delta_\alpha(]0, 1[)$ pour chaque $\alpha \in [0, 1[$?

Troisième partie

Une famille de mesures de probabilité $\mathcal{M} \subset \mathbf{M}_1(E)$ est dite **relativement compacte** dans $\mathbf{M}_1(E)$ si de toute suite $\{\mu_n : n \geqslant 1\} \subset \mathbf{M}_1(E)$ on peut extraire une sous-suite faiblement convergente. Une famille de mesures de probabilité $\mathcal{M} \subset \mathbf{M}_1(E)$ est dite **tendue** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_\varepsilon \subset E$ tel que $\mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$, $\forall \mu \in \mathcal{M}$. Dans cette partie on veut prouver que ces deux notions sont équivalentes, c'est-à-dire que $\mathcal{M}$ est relativement compacte si et seulement si $\mathcal{M}$ est tendue (**théorème de Prohorov**).

1. On suppose d'abord que $\mathcal{M}$ est relativement compacte. Comme E est un espace séparable complet, il existe un sous-ensemble $D = \{x_1, x_2, \ldots\}$ dénombrable tel que $\overline{D} = E$. De plus, pour tout $\delta > 0$, $E = \cup_{i \geqslant 1} B(x_i, \delta)$, $B(x_i, \delta) := \{x \in E : \rho(x, x_i) < \delta\}$. On note $U_n = \cup_{i=1}^n B(x_i, \delta)$, donc la suite croissante d'ensembles satisfait $\lim_n U_n := \cup_{n \in \mathbb{N}^*} U_n = E$. On veut montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \mu(E \setminus U_{n_\varepsilon}) < \varepsilon,\ \forall \mu \in \mathcal{M}. \tag{1}$$

a) Écrire l'affirmation contraire de (1) avec $\varepsilon_0 > 0$. En déduire qu'il existe une sous-suite de $\{n\}$, $\{n_k; k \in \mathbb{N}^*\}$, $n_k \geqslant k$, et $\mu \in \mathcal{M}$ telles que :

$$\mu(E \setminus U_k) \geqslant \limsup_{n_j \uparrow \infty} \mu_{n_j}(E \setminus U_k).$$

Tournez la page S.V.P.

b) Prouver que (on utilisera la monotonie des U_n)

$$\mu(E \setminus U_k) \geqslant \limsup_{n_j \uparrow \infty} \mu_{n_j}(E \setminus U_{n_j}) \geqslant \varepsilon_0$$

c) Pourquoi cela est une contradiction?

2. Utiliser (1) pour montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon > 0, \exists n_{k,\varepsilon} \in \mathbb{N}^* : \mu\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{n_{k,\varepsilon}} B(x_i, \frac{1}{k})\right) < \frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{2}$$

Notons $K_\varepsilon = \overline{\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{i=1}^{n_{k,\varepsilon}} B(x_i, \frac{1}{k})}$. Justifier que l'ensemble K_ε est un espace complet. Montrer que l'ensemble K_ε est contenu dans une réunion finie de boules ouvertes de même rayon, autrement dit, que c'est un ensemble totalement borné. Énoncer et utiliser le théorème de Hausdorff pour justifier que l'ensemble K_ε est un compact de E.

3. Utiliser (2) pour vérifier que $\mu(E \setminus K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$, pour tout $\mu \in \mathcal{M}$. Conclure la preuve de l'implication "relative compacité $\Rightarrow$ tension".

4. On suppose maintenant que la famille $\mathcal{M}$ est tendue. Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists K_n \subset K_{n+1} \text{ compacts } : \mu(E \setminus K_n) < \frac{1}{n}.$$

5. On introduit la famille dénombrable $\mathcal{F}$ d'ensembles constituée de toutes les réunions finies d'ensembles de la forme $\overline{B(x_i, r)} \cap K_n$ où $x_i \in D$, $r \in \mathbb{Q}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots\}$. Pour une suite quelconque $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ on considère le tableau suivant :

$$\begin{array}{llll}
\mu_1(F_1), & \ldots, & \mu_n(F_1), & \ldots \\
\mu_1(F_2), & \ldots, & \mu_n(F_2), & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\mu_1(F_n), & \ldots, & \mu_n(F_n), & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Montrer qu'il existe des sous-suites $\{\mu_n\} \supset \{\mu_n^{(1)}\} \supset \ldots \supset \{\mu_n^{(k)}\} \supset \ldots$ telles que $\mu_n^{(k)}(F_k) \to a_k$, lorsque $n \uparrow \infty$, avec $a_k \in [0,1]$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mu_n^{(n)}(F_k) \to a_k$, lorsque $n \uparrow \infty$.

6. Déduire que de toute suite $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ on peut extraire une sous-suite $\{\mu_{n_k} : k \in \mathbb{N}^*\}$ telle que

$$\lim_{k \uparrow \infty} \mu_{n_k}(F) = \nu(F), \forall F \in \mathcal{F}. \tag{3}$$

où $\nu : \mathcal{F} \to [0,1]$ satisfait :

- $F \subset F' \Rightarrow \nu(F) \subset \nu(F')$;
- $F, F' \in \mathcal{F} : \nu(F \cup F') \leqslant \nu(F) + \nu(F')$;
- $F, F' \in \mathcal{F},\ F \cap F' = \emptyset : \nu(F \cup F') = \nu(F) + \nu(F')$.

Tournez la page S.V.P.

On peut montrer **(admis)**, par un argument de classe monotone, que

$$\exists\, \mu \in \mathbf{M}_1(E) : \mu(G) = \sup_{F \in \mathcal{F}, F \subset G} \nu(F), \text{ pour tout ouvert } G \subset E. \tag{4}$$

7. On veut montrer que μ_{n_k} converge faiblement vers μ quand $k \uparrow \infty$.

a) Montrer que pour tout ouvert $G \subset E$ et pour tout $F \in \mathcal{F}, F \subset G$, on a $\nu(F) = \lim_{k\uparrow\infty} \mu_{n_k}(F) \leqslant \liminf_{k\uparrow\infty} \mu_{n_k}(G)$.

b) En déduire par (4) que $\mu(G) \leqslant \liminf_{k\uparrow\infty} \mu_{n_k}(G)$ et conclure ce point ainsi que la preuve de l'implication "tension $\Rightarrow$ relative compacité".

Quatrième partie

Dans cette partie on montre plusieurs applications du théorème de Prohorov prouvé en troisième partie. Les points **1, 2, 3 et 7** sont indépendants.

1. Montrer que dans le cas particulier d'un espace métrique E compact, toute famille $\mathcal{M} \subset \mathbf{M}_1(E)$ est tendue, donc relativement compacte.

2. **a)** Soit $\mu \in \mathbf{M}_1(E)$. Montrer que la famille avec un seul élément $\mathcal{M} = \{\mu\}$ est tendue.

b) Soient $\mu_1, \ldots, \mu_\ell \in \mathbf{M}_1(E)$ un nombre fini de mesure de probabilité et soit $\mathcal{M} \subset \mathbf{M}_1(E)$ une famille tendue. Utiliser le point **a)** précédent pour montrer que la famille $\mathcal{M} \cup \{\mu_1, \ldots, \mu_\ell\}$ est tendue.

3*. Pour $\mu, \nu \in \mathbf{M}_1(E)$ on définit

$$L(\mu, \nu) := \inf \left\{ \delta > 0 : \mu(F) < \nu(F^{(\delta)}) + \delta \text{ et } \nu(F) < \mu(F^{(\delta)}) + \delta, \forall \text{fermé } F \subset E \right\},$$

où l'ouvert $F^{(\delta)} := \{x \in E : \rho(x, F) < \delta\}$ tend vers F lorque $\delta \downarrow 0$. On veut montrer que L est une métrique (la **métrique de Lévy**) sur $\mathbf{M}_1(E)$ qui devient alors un espace complet.

a) Montrer que L est symétrique et qu'elle satisfait l'inégalité triangulaire.

b) Pour montrer qu'il s'agit d'une métrique, il suffit de montrer l'équivalence

$$\mu_n \Rightarrow \mu \Leftrightarrow L(\mu_n, \mu) \to 0.$$

Pourquoi?

c) Supposons que $L(\mu_n, \mu) \to 0$. Montrer que pour tout fermé F, $\mu(F^{(\delta)}) + \delta \geqslant \limsup \mu_n(F)$, pour tout $\delta > 0$. En déduire que pour tout fermé F, $\mu(F) \geqslant \limsup \mu_n(F)$ et conclure que $\mu_n \Rightarrow \mu$.

d) Supposons que $\mu_n \Rightarrow \mu$ et soient $\delta > 0$ et $F \subset E$ un fermé. On définit

$$\psi_F(x) := \frac{\rho(x, E \setminus F^{(\delta)})}{\rho(x, E \setminus F^{(\delta)}) + \rho(x, F)}, \; x \in E.$$

Montrer que $\mathbb{1}_F \leqslant \psi_F \leqslant \mathbb{1}_{F^{(\delta)}}$ et que $|\psi_F(x) - \psi_F(y)| \leqslant \frac{\rho(x,y)}{\delta}$.

Tournez la page S.V.P.

e)* On admet qu'on peut choisir $m \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sup_{n \geqslant m} \sup\{|\langle \psi_F, \mu_n \rangle - \langle \psi_F, \mu \rangle| : F \subset E \text{ fermé}\} < \delta.$$

En déduire que pour tout $n \geqslant m$,

$$\mu(F) \leqslant \mu_n(F^{(\delta)}) + \delta \text{ et } \mu_n(F) \leqslant \mu(F^{(\delta)}) + \delta.$$

autrement dit, $\sup_{n \geqslant m} L(\mu_n, \mu) \leqslant \delta$, d'où $L(\mu_n, \mu) \to 0$.

f)* Enfin, on veut montrer que toute suite $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ qui est de Cauchy pour la métrique de Lévy L est tendue. On donne $\varepsilon > 0$ et on choisit, pour chaque $\ell \in \mathbb{N}^*$ un $m_\ell \in \mathbb{N}^*$ et un compact $K_\ell \subset E$ tel que

$$\sup_{n \geqslant m_\ell} L(\mu_n, \mu_{m_\ell}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{\ell+1}} \text{ et } \max_{1 \leqslant n \leqslant m_\ell} \mu_n(E \setminus K_\ell) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{\ell+1}}.$$

Montrer que si on pose $\varepsilon_\ell = \frac{\varepsilon}{2^\ell}$, on a pour chaque $\ell \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mu_n(E \setminus K_\ell^{(\varepsilon_\ell)}) \leqslant \varepsilon_\ell$. En particulier, si on pose $K = \bigcap_{\ell=1}^{\infty} \overline{K_\ell^{(\varepsilon_\ell)}}$, alors K est un compact et $\mu_n(K) \geqslant 1 - \varepsilon$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Dans ce point $E = \mathbb{R}$. Pour $\mu \in \mathbf{M}_1(\mathbb{R})$ on note $\widehat{\mu} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction caractéristique $\widehat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \mu(dx)$. On veut montrer l'inégalité suivante : pour tout $T > 0$,

$$\mu\left(\mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{T}, \frac{1}{T}\right]\right) \leqslant \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} (1 - \widehat{\mu}(t)) dt \tag{5}$$

a) Expliquer les égalités suivantes :

$$\frac{1}{T} \int_{-T}^{T} (1 - \widehat{\mu}(t)) dt = 2 - \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} \widehat{\mu}(t) dt = 2 - \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} \mu(dx) \int_{-T}^{T} e^{itx} dt$$

$$= 2 - \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} \mu(dx) \int_0^T \cos(tx) dt = 2 - \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{Tx} \sin(tx) \Big|_{t=0}^{t=T} \right) \mu(dx)$$

$$= 2 - \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(Tx)}{Tx} \mu(dx).$$

b) On note $A = \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{T}, \frac{1}{T}\right]$. Vérifier que :

$$\frac{1}{T} \int_{-T}^{T} (1 - \widehat{\mu}(t)) dt \geqslant \int_{\mathbb{R}} \left(2 - \left| \frac{\sin(Tx)}{Tx} \right| \right) \mathbb{1}_A(x) \mu(dx) \geqslant \mu(A).$$

5. On continue de supposer que $E = \mathbb{R}$ et soit $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ une suite dans $\mathbf{M}_1(\mathbb{R})$. Dans ce point on va montrer que si μ_n converge faiblement vers $\mu \in \mathbf{M}_1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{\mu}_n(t) \to \widehat{\mu}(t)$ uniformément en t dans un compact de $\mathbb{R}$.

a) Montrer d'abord que la convergence est ponctuelle en $t \in \mathbb{R}$.

Tournez la page S.V.P.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Dire pourquoi il existe un compact K_ε tel que $\mu_n(\mathbb{R} \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire qu'il existe $T_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $T \leqslant T_\varepsilon$ on a $\mu_n\left(\mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{T}, \frac{1}{T}\right]\right) < \varepsilon$.

c) On note à nouveau $A = \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{T}, \frac{1}{T}\right]$. Vérifier que :

$$|\widehat{\mu}_n(t+s) - \widehat{\mu}_n(t)| \leqslant \int_{-\frac{1}{T}}^{\frac{1}{T}} |e^{itx}||e^{isx} - 1|\mu_n(dx) + \int_A |e^{i(t+s)x} - e^{itx}|\mu_n(dx)$$

$$\leqslant \int_{-\frac{1}{T}}^{\frac{1}{T}} |e^{isx} - 1|\mu_n(dx) + 2\mu_n(A) \leqslant \sup_{|x| \leqslant \frac{1}{T}} |e^{isx} - 1| + 2\varepsilon \leqslant 3\varepsilon$$

pour tout $T \leqslant T_\varepsilon$ et $|s| < \delta_\varepsilon$ (donné par la continuité en 0 de $x \mapsto e^{itx}$).

d) En déduire l'équicontinuité de la suite $\{\widehat{\mu}_n : n \in \mathbb{N}^*\}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : |\widehat{\mu}_n(t+s) - \widehat{\mu}_n(t)| < 3\varepsilon, \forall t \in \mathbb{R}, \forall |s| < \delta_\varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Conclure.

6. Une fois de plus on suppose que $E = \mathbb{R}$ et soit $\{f_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ une suite de fonctions caractéristiques (associées aux probabilités μ_n, c'est-à-dire $f_n(t) = \widehat{\mu}_n(t)$). Supposons que $\lim_{n\uparrow\infty} f_n(t) = f(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et que f est une fonction continue en $t = 0$. On va montrer qu'il existe $\mu \in \mathbf{M}_1(\mathbb{R})$ telle que $f = \widehat{\mu}$ et que $\mu_n \Rightarrow \mu$, lorsque $n \uparrow \infty$.

a) Déduire par l'inégalité du point **3** de cette même partie que

$$\limsup_{n\uparrow\infty} \mu_n(A) \leqslant \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}(1 - f_n(t))dt \leqslant \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}(1 - f(t))dt$$

et que le membre de droite peut être fait plus petit que $\varepsilon > 0$ lorsque $T \leqslant T_\varepsilon$ petit.

b) On note $K_\varepsilon = [-\frac{1}{T_\varepsilon}, \frac{1}{T_\varepsilon}]$. Montrer qu'il existe n_ε tel que $\mu_n(\mathbb{R} \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$, pour tout $n \geqslant n_\varepsilon$.

c) Utiliser le point **2** de cette même partie pour déduire que la suite $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ est tendue ainsi que relativement compacte. Soit la sous-suite $\mu_{n_k} \Rightarrow \mu$.

d) Utiliser **4** pour montrer que $\varphi = \widehat{\mu}$.

e) Soit une sous-suite quelconque $\{\mu_{n'} : n' \in \mathbb{N}^*\}$. Pourquoi elle est tendue? Soit μ' telle que $\mu_{n'_k} \Rightarrow \mu'$. Déduire que $\mu' = \mu$ et donc $\mu_n \Rightarrow \mu$.

7. On revient au cas où (E, ρ) est un espace métrique séparable complet gńéral. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace de probabilité et soit $\{X_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans E. On dit que la suite $\{X_n\}$ **converge en loi** vers une variable aléatoire (toujours à valeurs dans E) X si la suite des lois $\{Q_{X_n}\}$ converge faiblement vers la loi Q_X. On dit que la suite $\{X_n\}$ **converge en probabilité** vers X si, pour tout $\delta > 0$, $\lim_{n\uparrow\infty} \mathrm{P}(\rho(X_n, X) \geqslant \delta) = 0$. On veut montrer que la convergence en probabilité implique la convergence en loi. Soit $\varphi \in C_b^\rho(E; \mathbb{R})$ et $\delta > 0$. Montrer que

$$\limsup_{n\uparrow\infty} |\mathrm{E}[\varphi(X_n)] - \mathrm{E}[\varphi(X)]| \leqslant \varepsilon_\delta + \|\varphi\|_u \limsup_{n\uparrow\infty} \mathrm{P}(\rho(X_n, X) \geqslant \delta),$$

où $\varepsilon_\delta := \sup\{|\varphi(x) - \varphi(y)| : \rho(x,y) \leqslant \delta\} \to 0$, lorsque $\delta \downarrow 0$. En déduire la convergenece en loi.