Master et Magistère 1ère année Mathématiques 2010-2011
Probabilités de base
Convergences de suites de variables aléatoires. Théorèmes limites fondamentaux.

3.1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n z^n$ à coefficients aléatoires est p.s. constant.

3.2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi donnée par $\mathrm{P}(X_n = 1) = p$, $\mathrm{P}(X_n = -1) = 1 - p$, $0 < p < 1$, $p \neq \frac{1}{2}$. On pose $S_0 = 0$ et pour $n \geqslant 1$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. L'événement $A_n = \{S_n = 0\}$ s'appelle un retour à 0.
(i) Que représente l'événement $\limsup_n A_n$?
(ii) Montrer que $\mathrm{P}(\limsup_n A_n) = 0$.

3.3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes.
(i) Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n$ converge ou diverge presque sûrement.
(ii) Montrer que si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n$ converge presque sûrement, alors pour tout $a > 0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P}(|X_n| > a) < \infty$.

3.4. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. Montrer que :
(i) si pour un $M \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}}(1 - F_{X_n}(M)) < \infty$, alors $\limsup_{n\uparrow\infty} X_n \leqslant M$ p.s.
(ii) si pour un $M \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} F_{X_n}(M) < \infty$, alors $\liminf_{n\uparrow\infty} X_n \geqslant M$ p.s.

3.5. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. La loi de X_n est :

$$\mathrm{P}_{X_n} = \frac{1}{n^2}(\delta_{n^4} + \delta_{n^{-4}}) + \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)\delta_0.$$

Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} X_n$ converge presque sûrement.

3.6. On considère l'espace de probabilité $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue. Toutes les variables aléatoires seront définies sur cet espace de probabilité. Rappel :

$$\begin{array}{ccccc} \text{convergence p.s.} & \Longrightarrow & \text{convergence en prob.} & \Longrightarrow & \text{convergence en loi} \\ & & \Uparrow & & \\ & & \text{convergence dans } \mathrm{L}^2 & & \end{array}$$

(i) Construire une suite de variables aléatoires $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ telle que $X_n \to 0$ en probabilité et que X_n ne converge pas vers 0 presque sûrement, quand $n \to \infty$.
(ii) Construire une suite de variables aléatoires $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ telle que $X_n \to 0$ dans L^1 mais pas dans L^2, quand $n \to \infty$.
(iii) Construire une suite de variables aléatoires $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ telle que $X_n \to 0$ presque sûrement et que X_n ne converge pas vers 0 dans L^1.

3.7.* Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1. On note $M_n = \max_{1\leqslant j\leqslant n} X_j$.
(i) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}(M_n \leqslant (1-\varepsilon)\ln n) = \exp(n \ln(1 - n^{\varepsilon - 1})).$$

(ii) Par le lemme de Borel-Cantelli, en déduire

$$\frac{M_n}{\ln n} \geqslant 1 - \varepsilon \ \text{ p.s. pour } \ n \ \text{ assez grand.}$$

(iii) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}(M_n \geqslant (1+\varepsilon)\ln n) = 1 - \exp(n \ln(1 - n^{-\varepsilon-1})).$$

(iv) Soit la sous-suite $n_k = [(k+1)^\delta]$, $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon\delta > 1$, où $[\cdot]$ note la partie entière. Par le lemme de Borel-Cantelli, en déduire

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{M_{n_k}}{\ln n_k} \leqslant 1, \quad \text{p.s.}$$

Quelle est la limite presque sûre de $\frac{M_{n_k}}{\ln n_k}$?
(v) Pour tout entier $n > 0$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n_k \leqslant n < n_{k+1}$. Montrer que

$$\frac{\ln n_k}{\ln n_{k+1}} \cdot \frac{M_{n_k}}{\ln n_k} \leqslant \frac{M_n}{\ln n} \leqslant \frac{M_{n_{k+1}}}{\ln n_{k+1}} \cdot \frac{\ln n_{k+1}}{\ln n_k}.$$

En déduire que, lorsque $n \to \infty$

$$\frac{M_n}{\ln n} \xrightarrow{\text{p.s.}} 1.$$

(vi) On a donc que $M_n = \ln n + o(\ln n)$ p.s. et on veut préciser le contenu du terme $o(\ln n)$. On note $Z_n = M_n - \ln n$. Montrer, en utilsant les fonctions de répartition que Z_n converge en loi vers une variable dont on précisera la densité.

3.8. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes centrées uniformément bornées.
(i) Montrer que $\mathrm{E}[(X_1 + \ldots + X_n)^4] \leqslant \text{cste}.n^2$.
(ii) En déduire que, lorsque $n \to \infty$

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{\text{p.s.}} 0.$$

3.9. Montrer que l'espace L^0 peut être muni d'une structure d'espace métrique complet. En déduire l'unicité de la limite en probabilité.

3.10. Soient $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ et $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ des suites de variables aléatoires et soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Toutes les convergences sont pour $n \to \infty$. **(i)** Montrer que si $X_n \to X$ et $Y_n \to Y$ presque sûrement (resp. en probabilité), alors $g(X_n, Y_n) \to g(X, Y)$ presque sûrement (resp. en probabilité).
(ii) Si $X_n \to X$ et $Y_n \to Y$ en probabilité, alors $X_n + Y_n \to X + Y$, $aX_n + bY_n \to aX + bY$ $(a, b$ constantes), $X_nY_n \to XY$ et enfin, lorsque $\mathrm{P}(Y_n \neq 0) = \mathrm{P}(Y \neq 0) = 1$, $X_n/Y_n \to X/Y$ en probabilité.
(iii) Si $X_n \to X$ en loi et et $Y_n \to c$ en probabilité alors

a) $X_n + Y_n \to X + c$ en loi ;

b) $X_nY_n \to cX$ en loi ;

c) $X_n/Y_n \to X/c$ en loi, dès que $\mathrm{P}(Y_n \neq 0) = 1$ et $c \neq 0$.

3.11. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre deux et telles que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(X_n) = c$ et $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(X_n) = 0$. Montrer que X_n converge en probabilité vers c.

3.12. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires réelles gaussiennes indépendantes, de même loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
(i) Soit

$$T_n := \frac{X_1 + \ldots + X_n - nm}{n^\alpha},\ 1/2 < \alpha \leqslant 1.$$

Montrer que T_n est une variable aléatoire gaussienne et calculer son espérance et sa variance.
(ii) Utiliser l'exercice **1.20** pour majorer $\mathbb{P}(|T_n| > \varepsilon)$.
(iii) En déduire que $T_n \to 0$ p.s.

3.13. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi de Bernoulli telles que $\mathrm{E}(X_n) = \frac{1}{n}$. Étudier la convergence en probabilité et presque sûre de cette suite.

3.14. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles de même loi admetant un moment d'ordre deux, indépendantes. Montrer que, lorsque $n \to \infty$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{0\leqslant j\leqslant n} |X_j| \xrightarrow{\text{prob}} 0.$$

3.15. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telles que X_n suit la loi uniforme sur $\{\pm n^\alpha\}$, $\alpha > 0$. Montrer que si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ alors la suite satisfait la loi faible des grands nombres. Est-ce que la réciproque de cette affirmation est vraie ?

3.16. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge en probabilité vers une constante c. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Montrer que $g(X_n) \xrightarrow{\mathrm{L}^1} g(c)$.

3.17. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles deux-à-deux non corrélées telles que $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{E}(|X_n^2|) < \infty$. On note $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.
(i) On suppose que les X_n ont toutes la même espérance m. Montrer que, lorsque $n \to \infty$

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathrm{L}^2} m.$$

(ii) On suppose que $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{E}(X_1)+\ldots+\mathrm{E}(X_n)}{n} = m$. Montrer que, lorsque $n \to \infty$

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{prob}} m.$$

(iii) On suppose que les X_n sont toutes centrées et que de plus $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{Var}(X_n) < \infty$. Montrer que S_n converge dans L^2.

3.18. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi binomiale $X_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$ $(0 < \lambda < 1)$. Montrer que X_n converge en loi vers une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ.

3.19. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme $X_n \sim \mathcal{U}(1,\ldots,n)$. Montrer que $\frac{X_n}{n}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}_{[0,1]}$.

3.20. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi géométrique $X_n \sim \mathcal{G}(\frac{p}{n})$ $(0<p<1)$. Montrer que $\frac{X_n}{n}$ converge en loi (à l'aide des fonctions caractéristiques et des fonctions de répartition).

3.21. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires réelles telles que pour tout n X_n et Y_n sont indépendantes. On suppose que X_n converge en loi vers une variable X et Y_n converge en loi vers une variable Y. Montrer que la suite des couples (X_n, Y_n) converge en loi.

3.22. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et soit $U \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$. On pose

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k}.$$

(i) Montrer que la fonction caractéristique de Y_n peut se mettre sous les deux formes suivantes :

$$\varphi_{Y_n}(t) = e^{\frac{it}{2}} e^{-\frac{it}{2^{n+1}}} \cos(\frac{t}{4})\cos(\frac{t}{8})\cos(\frac{t}{16})\ldots\cos(\frac{t}{2^{n+1}}) = e^{\frac{it}{2}} e^{-\frac{it}{2^{n+1}}} (\frac{1}{2})^n \frac{\sin(\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2^{n+1}})}.$$

(ii) En déduire que Y_n converge en loi vers U.

3.23. Soit $\psi : [0,1] \to [0,1]$ et soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur [0,1]. On pose

$$I = \int_0^1 \psi(x)dx,\ Y_k = \begin{cases} 1 & \text{si } \psi(U_{2k}) \geqslant U_{2k+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(i) Montrer que les variables aléatoires Y_k sont indépendantes et trouver leurs lois.
(ii) Montrer que, lorsque $n \to \infty$

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{n}(Y_1 + \ldots + Y_n) \xrightarrow{\text{p.s.}} I.$$

(iii) *(méthode de Monte-Carlo simple)*
On veut estimer I à l'aide de $\bar{Y}_n$ et l'erreur relative est

$$\varepsilon_n = \frac{|\bar{Y}_n - I|}{I}.$$

Donner un majorant de $\mathrm{P}(\varepsilon_n > \alpha)$ en termes de α, I, n.
(iv) Supposons que des estimations ont permis par ailleurs de voir que $I > 0,5$. À partir de quelle valeur de n s'assure-t-on 19 chances sur 20 de faire une erreur relative inférieure à 1%

en estimant I ?

3.24. Soit $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ une densité de probabilité et soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue. On pose

$$I = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) f(x) dx.$$

(i) *(méthode de Monte-Carlo simple)*
Montrer que si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes ayant la même densité f alors, lorsque $n \to \infty$

$$\frac{1}{n}(\psi(X_1) + \ldots + \psi(X_n)) \xrightarrow{\text{p.s.}} I.$$

(ii) *(méthode de Monte-Carlo avec rejet)*
Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur [0,1] indépendante de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et soit $g : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ une densité de probabilité telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{g(x)}{f(x)} \leqslant c$ pour une certaine constante c. Montrer que, lorsque $n \to \infty$

$$\frac{c}{n} \sum_{j=1}^{n} \psi(X_j) \mathbb{1}_{g(X_j) < cU_j f(X_j)} \xrightarrow{\text{p.s.}} \int_{\mathbb{R}} \psi(x) g(x) dx.$$

(iii) *(facultatif)* On pose

$$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } cU_n < \frac{g(X_n)}{f(X_n)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Bernoulli indépendante. On pose

$$N(n) = \min\{k \in \mathbb{N} : Y_1 + \ldots + Y_k = n\}.$$

Donner un equivalent presque sûr de $N(n)$. On considère les variables aléatoires

$$Z_1 = X_{N(1)}, \ldots, Z_n = X_{N(n)}, \ldots$$

Montrer que la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de densité g. En déduire que, lorsque $n \to \infty$

$$\frac{1}{n}(\psi(Z_1) + \ldots + \psi(Z_n)) \xrightarrow{\text{p.s.}} \int_{\mathbb{R}} \psi(x) g(x) dx.$$

3.25. *(formule d'inversion de transformée de Laplace de Post-Widder)*
Soit $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$ une fonction (densité de probabilité) continue bornée. On rappelle que la transformée de Laplace de f est la fonction

$$g(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx.$$

(i) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\frac{1}{x})$. Quelle sont les densités de $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et de $\frac{S_n}{n}$.

(ii) Montrer que g est indéfinement dérivable sur $]\varepsilon, \infty[$, pour tout $\varepsilon > 0$, de dérivée n-ième donnée sur $]0, \infty[$ par

$$g^{(n)}(s) = (-1)^n \int_0^\infty x^n e^{-sx} f(x) dx.$$

(iii) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = f(x).$$

(iv) En déduire la formule d'inversion de Post-Widder :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^n g^{(n-1)}(\frac{n}{x})}{x^n (n-1)!} = f(x),$$

et l'injectivité de la transformée de Laplace vue comme application de l'espace des fonctions continues bornées dans l'espace des fonctions continues.

3.26. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi de Poisson $X_n \sim \mathcal{P}(a_n)$ $(a_n > 0)$. On note $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ et $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. On suppose que $lim_{n\to\infty} s_n = \infty$.
(i) Montrer que, lorsque $n \to \infty$

$$\frac{S_n - s_n}{\sqrt{s_n}} \xrightarrow{\text{loi}} G \sim \mathcal{N}(0,1).$$

(ii)* On suppose que tous les $a_n = 1$ et on pose $T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$. Pourquoi pour tout $x > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(x \leqslant T_n) = \mathrm{P}(x \leqslant G)$? À l'aide de l'inégalité Bienaymé-Tchebytchev montrer que on peut dominer $\mathrm{P}(x \leqslant T_n)$ par une fonction intégrable sur $]0, \infty[$. En déduire,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(T_n^+) = \mathrm{E}(G^+) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Prouver la formule de Stirling : lorsque $n \to \infty$,

$$\frac{e^{-n} n^n \sqrt{n}}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

3.27. Soit $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires d'espérance m et de variance σ^2. On pose $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ et $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$. **(i)** Calculer les limites en probabilité et presque sûres de $\bar{X}$ et de S^2, quand $n \to \infty$.
(ii) Montrer que $\frac{n}{n-1}\frac{S^2}{\sigma^2} \to 1$, en probabilité et presque sûrement, quand $n \to \infty$.
(iii) Calculer la limite, quand $n \to \infty$, de la suite de fonctions

$$G_n(x) = \mathrm{P}\left[\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - m)}{\sigma} \leqslant x\right], \; x \in \mathbb{R}$$

De quel type de convergence s'agit-il ?
(iv) Montrer que $\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{S^2}}(\bar{X} - m) \to \mathcal{N}(0,1)$ et $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{S^2}}(\bar{X} - m) \to \mathcal{N}(0,1)$ en loi, quand $n \to \infty$.

3.28.
(i) Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable avec ϕ' continue en un point $a \in \mathbb{R}$. Soient $\{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ une

suite de réels, non-nuls, telle que $c_n \to \infty$, et $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ une suite de variables aléatoires telle que $c_n(X_n - a) \to X$ en loi, quand $n \to \infty$. Montrer que $c_n(\phi(X_n) - \phi(a)) \to \phi'(a)X$ en loi, quand $n \to \infty$.
(ii) Soit $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires d'espérance m et de variance σ^2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable avec dérivée continue au point m. Montrer que $\sqrt{n}[g(\bar{X}) - g(m)] \to \mathcal{N}(0, [\sigma g'(m)]^2)$, en loi quand $n \to \infty$.

3.29.
(i) Soit $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ une suite de variables aléatoires gaussiennes centrées de variance σ_n^2, telles que $\sigma_n^2 \to 0$. Montrer que $X_n \to \delta_0$ en loi.
(ii) Soit $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de loi commune Q. Montrer que, presque sûrement, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i} \to Q$ en loi.
(iii) Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{k/n}$ converge en loi vers la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$, quand $n \to \infty$.
(iv) Soit $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ une suite de variables aléatoires gaussiennes de lois respectivement $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$. On suppose que $m_n \to m$ et $\sigma_n^2 \to \sigma^2$. Montrer que $X_n \to \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ en loi.

3.30. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telles que $f_{X_n}(x) = {}^{3^{-n}}/_{\pi(3^{-2n}+x^2)}$. On note $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement. Si les variables (X_n) sont indépendantes déterminer la limite en loi de (S_n).