Contrôle continu : sujet de la deuxième épreuve

Master de Mathématiques 1ère année - Séries Chronologiques

jeudi 7 juin 2007 - durée 2 heures - documents et calculatrice autorisés

Exercice I. (7 points)

Les trois questions suivantes sont indépendantes.

1. Pour quelles valeurs de ϕ le processus $X_t = \phi X_{t-1} + \phi^2 X_{t-2} + Z_t$, $t \in \mathbb{Z}$, avec $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$, est causal ?
2. Quelle est l'expression de la matrice de covariance $V(\phi, \theta)$ dans la propriété de normalité asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance $(\widehat{\phi}, \widehat{\theta})$ pour un modèle ARMA(1,1) avec paramètres ϕ et θ, causal et inversible, dirigé par un bruit $\{Z_t\} \sim IID(0, \sigma^2)$?
3. Que vaut la fonction génératrice d'autocovariance (et calculer ensuite la fonction d'autocorrélation) du processus $X_t = Z_t + \theta Z_{t-3} + (1/\theta) Z_{t-6}$, $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$?

Exercice II. (7 points)

On dispose de deux observations x_1 et x_2 d'un modèle gaussien causal AR(1) $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$, avec bruit gaussien $\{Z_t\} \sim IIDN(0, \sigma^2)$. On suppose que $|x_1| \neq |x_2|$. Les valeurs des paramètres ϕ et σ^2 sont inconnues et on veut les estimer. Notons $L(\phi, \sigma^2)$ la vraisemblance basée sur ces deux observations (dans son expression x_1, x_2 sont des paramètres connus).

1. Écrire l'expression de la vraisemblance L en utilisant les densités. Trouver la loi conditionnelle de X_2 sachant X_1. Utiliser la causalité pour montrer que X_1 est de loi gaussienne centrée de variance $\sigma^2/(1 - \phi^2)$. En déduire l'expression de L.
2. Écrire l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\sigma^2}$ en fonction de l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\phi}$ (et de deux observations x_1, x_2). Trouver ensuite l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\phi}$ en utilisant encore une fois la vraisemblance. Enfin, trouver l'expression finale de $\widehat{\sigma^2}$ en fonction seulement des observations x_1, x_2.
3. Montrer que le modèle ajusté $X_t = \widehat{\phi} X_{t-1} + Z_t$, $\{Z_t\} \sim IIDN(0, \widehat{\sigma^2})$ est causal.

<u>Application</u> : donner les estimations des paramètres ϕ et σ^2 lorsque $x_1 = 3.39$, $x_2 = -2.98$.

Exercice III. (9 points)

On dispose de 200 observations $x_1, \ldots, x_{200}$ d'une série temporelle et on a trouvé $\overline{x} = 10$, $\hat{\gamma}(0) = 2.27$,

$$\hat{\rho}(1) = 0.46;\ \hat{\rho}(2) = -0.29;\ \hat{\rho}(3) = -0.55;\ \hat{\rho}(4) = -0.31;\ \hat{\rho}(5) = 0.13;\ \hat{\rho}(6) = 0.38;\ \ldots$$

Le graphe de la fonction d'autocorrélation partielle empirique est dans la figure ci-dessous.

1. Choisir un modèle (basé sur un modèle AR) à partir de ces informations. Justifier votre choix.
2. Estimer <u>tous</u> les paramètres de votre modèle.
3. Indiquer des ensembles de confiance asymptotiques à 95% pour les coefficients du modèle (des intervalles de confiance et au moins une région de confiance).
4. Utiliser l'algorithme de Durbin-Levinson pour trouver la fonction d'autocorrélation partielle empirique $\hat{\phi}_{hh}$, pour $h = 1, 2, 3, 4$. Le choix de l'ordre vous semble raisonnable ?

Tournez la page S.V.P.

5. Les dernières quatre observations de la série sont $x_{200} = 14.23$; $x_{199} = 13.22$; $x_{198} = 8.50$; $x_{197} = 8.78$. Utiliser votre modèle ajusté pour prévoir les valeurs $\hat{x}_{201}, \hat{x}_{202}$ de la série et calculer les deux erreurs quadratiques.

<u>Bonus</u> : Écrire un script R pour répondre aux questions précédentes.