Contrôle continu : sujet de la première épreuve

Master de Mathématiques 1ère année - Séries Chronologiques

Jeudi 19 avril 2007 - durée 2 heures - documents et calculatrice autorisés

Exercice I. (7 points)

On considère $\{U_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus AR(1), $U_t - \phi U_{t-1} = W_t$, $t \in \mathbb{Z}$, avec $\{W_t\}_{t\in\mathbb{Z}} \sim WN(0, \sigma_w^2)$ et $|\phi| < 1$. Soit un autre bruit blanc $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{Z}} \sim WN(0, \sigma_z^2)$ tel que pour tous t, $s \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Corr}(W_t Z_s) = 0$. On note $\{V_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ le processus défini par $V_t := U_t + Z_t$, $t \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que $\{V_t\}$ est centré stationnaire et calculer sa fonction d'autocovariance $\gamma_v(\cdot)$.
2. On pose $X_t := V_t - \phi V_{t-1}$, $t \in \mathbb{Z}$. Montrer que cette série temporelle est centrée et que $\gamma_x(h) = 0$ si $|h| > 1$. Que valent $\gamma_x(0)$ et $\gamma_x(\pm 1)$?
3. Énoncer un résultat à partir duquel on peut déduire que $\{X_t\}$ est une série temporelle de type MA dirigée par un bruit $\{Y_t\}$ de variance σ_y^2. Préciser l'ordre.
4. Conclure que $\{V_t\}$ est une série temporelle remarquable. Exprimer les valeurs des paramètres en fonction de ϕ, σ_w^2 et σ_z^2. On pourra utiliser deux expressions de l'autocorrélation de $\{X_t\}$.

Application : $\phi = 1/4$ et $\sigma_w^2 = \sigma_z^2 = 4$.

Exercice II. (8 points)

Soit le processus ARMA(1,1), $X_t - \phi_1 X_{t-1} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1}$, $t \in \mathbb{Z}$, avec $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{Z}} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$.

1. Donner des conditions nécéssaires et suffisantes pour que le processus $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$ précédent soit causal, respectivement inversible. Sous ces conditions, calculer les coefficients ψ_j et π_j, pour $j \geqslant 0$, des représentations $X_t = \psi(B)Z_t$ et $Z_t = \pi(B)X_t$, $t \in \mathbb{Z}$.
2. Calculer les fonctions d'autocovariance $\gamma_x(\cdot)$ et d'autocorrélation $\rho_x(\cdot)$. Pour l'application ci-dessous donner leur repésentation en bâtons.
3. Donner la plus simple expression de la fonction génératrice d'autocovariance $G_x(z)$ du processus $\{X_t\}$. On introduit $f_x(\lambda) = \frac{G_x(e^{-i\lambda})}{2\pi}$, pour $\lambda \in [-\pi, \pi]$. Est-elle bien définie ? Montrer que $f_x(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|\theta(e^{-i\lambda})|^2}{|\phi(e^{-i\lambda})|^2}$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$. Que vaut $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda h} G_x(e^{-i\lambda})d\lambda$?

Application : $X_t = 0.4X_{t-1} + 0.45X_{t-2} + Z_t + Z_{t-1} + 0.25Z_{t-2}$, $t \in \mathbb{Z}$, avec $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{Z}} \sim \mathrm{WN}(0, 4)$.

Exercice III. (5 points)

Soient x_1, x_2, x_4, x_5 les observations d'un processus MA(1), $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$, $t \in \mathbb{Z}$, $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{Z}} \sim WN(0, \sigma^2)$. Trouver les meilleures estimations de la valeur manquante x_3 à l'aide de :

a) x_1 et x_2 ; b) x_4 et x_5. Calculer l'erreur quadratique dans les deux cas.

Application : $\theta = 0.25$, $\sigma^2 = 4$, $x_1 = -0.25$, $x_2 = -0.26$, $x_4 = 0.19$, $x_5 = 0,09$.

Exercice IV. (5 points)

Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus MA(2) ayant la moyenne μ inconnue, les paramètres θ_1, θ_2 connus et construit à l'aide d'un bruit blanc $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{Z}} \sim IID(0, \sigma^2)$ avec σ^2 connu. On possède un grand nombre n d'observations de ce processus $x_1, \ldots, x_n$ et on connaît la valeur de $s = x_1 + \ldots + x_n$.

1. Donner un estimateur ponctuel de μ Justifier avec un argument mathématique qu'il s'agit d'une bonne estimation de la moyenne.
2. Donner la loi asymptotique de l'estimateur proposé au point précédent.
3. Utiliser la loi asymptotique précédente pour construire un intervalle de confiance pour μ à coefficient de sécurité $1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1$.

Application : $n = 250$, $\theta_1 = .35$, $\theta_2 = .12$, $\sigma^2 = .09$, $\alpha = .05$.