# Feuille de travaux pratiques # 3

**Exercice 1** *Modèle de Wright-Fisher*
Soient $k$ et $N$ deux entiers tels que $0 < k < N$. On définit par récurrence une suite de variables $(X_n^N)_{n\geq 0}$ de la façon suivante : $X_0^N := k$ et pour pour tout $n \geq 0$ et $i \in \{0, \ldots, N\}$, la loi de $X_{n+1}^N$ sachant que $X_n^N = i$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(N, i/N)$.

1. Écrire un programme qui prend en entrée les entiers $k, N, n$ et qui génère et trace une trajectoire $(X_m^N)_{m=0\ldots n}$.
2. Mettre en évidence la convergence presque sûre de la suite $(X_n^N)_{n\geq 0}$ vers une variables $X_\infty^N$ à valeurs dans $\{0, N\}$.
3. Estimer les probabilités de sortie $\mathbb{P}(X_\infty^N = 0)$ et $\mathbb{P}(X_\infty^N = N)$.

**Exercice 2** *Arbres de Galton-Watson géométriques*
On rappelle que la loi géométrique de paramètre $p \in ]0, 1/2]$ sur $\mathbb{N}$ est la loi $P = \sum_{i\geq 0} p\, q^i \delta_i$ où l'on a posé $q := 1 - p$. Soit $(X_{n,k})_{n\geq 1, k\geq 1}$ une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $P$. On définit par récurrence une suite $(Z_n)_{n\geq 0}$ telle que $Z_0 := 1$ et pour $n \geq 0$ :

$$Z_{n+1} := \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n+1,k}.$$

La suite $Z_n$ représente le nombre d'individus à la génération $n$ d'un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction $P$. On adopte ici la convention $\sum_\varnothing = 0$ de sorte que si $Z_n = 0$ alors $Z_{n+1} = 0$. On désigne par $T := \inf\{n \geq 0, Z_n = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ le temps d'extinction de l'arbre. On note $m := \mathbb{E}[Z_1]$ et $\sigma^2 = \mathbb{E}[Z_1^2] - \mathbb{E}[Z_1]^2 \in \mathbb{R}_+$.

1. Écrire un programme qui prend en entrée un entier $n \in \mathbb{N}$, le paramètre $p$, et qui génère et trace une trajectoire $(Z_k)_{k=0\ldots n}$.
2. À $n$ fixé, utiliser la méthode de Monte Carlo pour vérifier numériquement que l'on a bien $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$.
3. Lorsque la loi de reproduction est la loi géométrique de paramètre $p$, la probabilité d'extinction $\mathbb{P}(T < +\infty)$ est égale à $p/q$. Retrouver numériquement ce résultat.
4. On suppose ici que $m = 1$. Par la méthode de Monte Carlo, mettre numériquement en évidence les fait suivants :
   (a) $\lim_{n\to+\infty} n\mathbb{P}(Z_n > 0) = 2/\sigma^2$ ;
   (b) $\mathcal{L}(Z_n/n | Z_n > 0)$ tend lorsque $n$ tend vers l'infini vers la loi exponentielle $\mathcal{E}(2/\sigma^2)$.
5. Lorsque $m > 1$, mettre en évidence la convergence de la suite $Y_n := Z_n/m^n$ vers une variable aléatoire $Y_\infty$. Vérifier numériquement que $\mathbb{E}[Y_\infty] = 1$ et $\mathrm{var}(Y_\infty) = \sigma^2/(m^2 - m)$ .