Université de Rennes 1
ENS Cachan, antenne de Bretagne

Magistère Mathématiques 1ère année
Année 2008 - 2009

Probabilités de base : contrôle continu no. 2

mercredi 1er avril 2009 - durée 1 heure - résumé autorisé

Exercice I.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes à densité. À une fonction borélienne positive $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ on associe deux fonctions

$$\psi(x) = \mathrm{E}[\Psi(x, Y)] \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}(y) = \mathrm{E}[\Psi(X, y)], \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Vérifier que $\mathrm{E}[\Psi(X,Y)] = \mathrm{E}[\psi(X)] = \mathrm{E}[\tilde{\psi}(Y)]$.
Application : supposons que les lois des variables aléatoires indépendantes sont $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{E}(\mu)$ $(\lambda, \mu > 0)$. Calculer $\mathrm{P}(X \leqslant Y)$.

Exercice II.

Soient $Z_1, \ldots, Z_r$, r variables aléatoires strictement positives indépendantes et de même loi. Calculer, pour $k \in \{1, \ldots, r\}$, $\mathrm{E}\left[\frac{Z_1+\ldots+Z_k}{Z_1+\ldots+Z_r}\right]$. On pourra d'abord justifier que les variables $\frac{Z_j}{Z_1+\ldots+Z_r}$, $j = 1, \ldots, r$ ont la même loi.

Exercice III.

Montrer que la fonction $t \mapsto \cos^n t$ ($t \in \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$ entier) est une fonction caractéristique.

Exercice IV.

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ la densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle W. On définit $p(u,v) := \begin{cases} \frac{f(u+v)}{u+v}, & \text{si } u > 0, v > 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer qu'il existe un couple aléatoire (U, V) ayant p pour densité de probabilité. On pourra utiliser le changement de variable $(u, v) \mapsto (u+v, \frac{u}{u+v})$. Trouver la loi du couple $(U + V, \frac{U}{U+V})$. Si on suppose que $W \in \mathrm{L}^2$ et si on note $m := \mathrm{E}(W)$ et $\sigma^2 := \mathrm{Var}(W)$, calculer la matrice de covariance de (U, V).