Université de Rennes 1 | Magistère Mathématiques 1ère année
ENS Cachan, antenne de Bretagne | Année 2008 - 2009

Probabilités de base : contrôle continu no. 1

mercredi 4 février 2009 - durée 1 heure - résumé autorisé

Exercice I.

Sur l'espace de probabilité $(]0,1], \mathcal{B}(]0,1]), \lambda)$ on considère la fonction $T(\omega) = [\frac{1}{\omega}]$, où $[\cdot]$ note la fonction partie entière. Montrer que T est une variable aléatoire discrète dont on indiquera les valeurs. Trouver la loi de T et calculer la probabilité de l'événement $\{T \geqslant 100\}$. T est-elle intégrable ?

Exercice II.

Pour quelle constante c la fonction $f(x) = ce^{-\frac{x}{2}-1}\mathbb{1}_{x \geqslant -2}$ est la densité de probabilité d'une variable aléatoire W ? Calculer la fonction de répartition de W ainsi que la densité de $|W|$.

Exercice III.

Soient f et g deux densités de probabilité sur $\mathbb{R}$ et on note F, respectivement G, les fonctions de répartition associées. Vérifier que, pour tout réel a tel que $|a| < 1$, la fonction définie par $h(x,y) := f(x)g(y)[1 + a(2F(x) - 1)(2G(y) - 1)]$, $x, y \in \mathbb{R}$, est la densité d'un couple aléatoire (X, Y). Calculer les densités marginales de X et Y. Répondre aux mêmes questions pour $k(x,y) := f(x)g(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Que peut-on remarquer ?

Exercice IV.

Soit Z une variable aléatoire réelle intégrable ayant la fonction de répartition F continue. Montrer que $E(|Z|) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} F(t)dt + \int_{0}^{\infty} (1 - F(t))dt$.

Exercice V.

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ et A, B, C des éléments de la tribu $\mathcal{A}$ d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. On veut étudier la convergence de la suite $(\mathbb{1}_{A_n})_{n \geqslant 1}$.

a) $(\mathbb{1}_{A_n})$ peut-elle converger uniformément sur Ω ? On pourra estimer $\sup\limits_{\omega \in \Omega} |\mathbb{1}_B(\omega) - \mathbb{1}_C(\omega)|$.

b) Démontrer que $(\mathbb{1}_{A_n})$ converge ponctuellement vers $\mathbb{1}_A$ si et seulement si la suite $(A_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers A. On pourra remarquer que $\min\{\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_C\} = \mathbb{1}_{B \cap C}$ et $\max\{\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_C\} = \mathbb{1}_{B \cup C}$.

c) Vérifier que $(\mathbb{1}_{A_n})$ converge en probabilité vers $\mathbb{1}_A$ si et seulement si $\lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{P}(A_n \Delta A) = 0$.