Licence de Mathématiques 2000-2001
Probabilités
4. Convergence des variables aléatoires

4.1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n z^n$ à coefficients aléatoires est p.s. constant.

4.2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi donnée par $\mathrm{P}(X_n = 1) = p$, $\mathrm{P}(X_n = 0) = 1 - p$, $0 < p < 1$, $p \neq \frac{1}{2}$. On pose $S_0 = 0$ et pour $n \geqslant 1$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. L'événement $A_n = \{S_n = 0\}$ s'appelle un retour à 0.
(i) Que représente l'événement $\limsup_n A_n$?
(ii) Montrer que $\mathrm{P}(\limsup_n A_n) = 0$.

4.3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes.
(i) Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n$ converge ou diverge presque sûrement.
(ii) Montrer que si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n$ converge presque sûrement, alors pour tout $a > 0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P}(|X_n| > a) < \infty$.

4.4. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. Montrer que:
(i) si pour un $M \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}}(1 - F_{X_n}(M)) < \infty$, alors $\limsup_{n\uparrow\infty} X_n \leqslant M$ p.s.
(ii) si pour un $M \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} F_{X_n}(M) < \infty$, alors $\liminf_{n\uparrow\infty} X_n \geqslant M$ p.s.

4.5. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. La loi de X_n est:

$$\mathrm{P}_{X_n} = \frac{1}{n^2}(\delta_{n^4} + \delta_{n^{-4}}) + \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)\delta_0.$$

Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} X_n$ converge presque sûrement.

4.6.* Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1. On note $M_n = \max_{1\leqslant j\leqslant n} X_j$.
(i) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}(M_n \leqslant (1-\varepsilon)\ln n) = \exp(n\ln(1 - n^{\varepsilon-1})).$$

(ii) Par le lemme de Borel-Cantelli, en déduire

$$\frac{M_n}{\ln n} \geqslant 1 - \varepsilon \text{ p.s. pour } n \text{ assez grand.}$$

(iii) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}(M_n \geqslant (1+\varepsilon)\ln n) = 1 - \exp(n\ln(1 - n^{-\varepsilon-1})).$$

(iv) Soit la sous-suite $n_k = [(k+1)^\delta]$, $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon\delta > 1$, où $[\cdot]$ note la partie entière. Par le lemme de Borel-Cantelli, en déduire

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{M_{n_k}}{\ln n_k} \leqslant 1, \quad \text{p.s.}$$

Quelle est la limite presque sûre de $\frac{M_{n_k}}{\ln n_k}$?
(v) Pour tout entier $n > 0$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n_k \leqslant n < n_{k+1}$. Montrer que

$$\frac{\ln n_k}{\ln n_{k+1}} \cdot \frac{M_{n_k}}{\ln n_k} \leqslant \frac{M_n}{\ln n} \leqslant \frac{M_{n_{k+1}}}{\ln n_{k+1}} \cdot \frac{\ln n_{k+1}}{\ln n_k}.$$

En déduire que, lorsque $n \to \infty$

$$\frac{M_n}{\ln n} \xrightarrow{\text{p.s.}} 1.$$

(vi) On a donc que $M_n = \ln n + o(\ln n)$ p.s. et on veut préciser le contenu du terme $o(\ln n)$. On note $Z_n = M_n - \ln n$. Montrer, en utilsant les fonctions de répartition que Z_n converge en loi vers une variable dont on précisera la densité.

4.7. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes centrées uniformément bornées.
(i) Montrer que $\mathrm{E}[(X_1 + \ldots + X_n)^4] \leqslant \text{cste}.n^2$.
(ii) En déduire que, lorsque $n \to \infty$

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{\text{p.s.}} 0.$$

4.8. Montrer que l'espace L^0 peut être muni d'une structure d'espace métrique complet. En déduire l'unicité de la limite en probabilité.

4.9. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre deux et telles que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(X_n) = c$ et $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(X_n) = 0$. Montrer que X_n converge en probabilité vers c.

4.10. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires telles que X_n converge vers une variable X en probabilité et Y_n converge vers une variable Y en probabilité. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.
(i) Montrer que $g(X_n,Y_n)$ converge en probabilité vers $g(X,Y)$.
(ii) Montrer que $X_n + Y_n$ converge en probabilité vers $X + Y$.

4.11. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi de Bernoulli telles que $\mathrm{E}(X_n) = \frac{1}{n}$. Étudier la convergence en probabilité et presque sûre de cette suite.

4.12. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles de même loi admetant un moment d'ordre deux, indépendantes. Montrer que, lorsque $n \to \infty$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{0\leqslant j\leqslant n} |X_j| \xrightarrow{\text{prob}} 0.$$

4.13. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telles que X_n suit la loi uniforme sur $\{\pm n^\alpha\}$, $\alpha > 0$. Montrer que si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ alors la suite satisfait la loi faible des grands nombres. Est-ce que la réciproque de cette affirmation est vraie?

4.14. Montrer que si X_n converge vers une variable X dans L^1, alors $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(X_n) = \mathrm{E}(X)$.

4.15. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et il existe un réel $M > 0$ tel que, pour tout entier n, $|X_n| \leqslant M$ p.s. Montrer que, lorsque $n \to \infty$

$$X_n \xrightarrow{\text{proba}} 0 \iff X_n \xrightarrow{\mathrm{L}^1} 0.$$

4.16. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge en probabilité vers une constante c. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Montrer que $g(X_n) \xrightarrow{\mathrm{L}^1} g(c)$.

4.17. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles deux-à-deux non corréllées telles que $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{E}(|X_n^2|) < \infty$. On note $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.
(i) On suppose que les X_n ont toutes la même espérance m. Montrer que, lorsque $n \to \infty$

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathrm{L}^2} m.$$

(ii) On suppose que $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{E}(X_1)+\ldots+\mathrm{E}(X_n)}{n} = m$. Montrer que, lorsque $n \to \infty$

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{prob}} m.$$

(iii) On suppose que les X_n sont toutes centrées et que de plus $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{Var}(X_n) < \infty$. Montrer que S_n converge dans L^2.

4.18. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi binomiale $X_n \sim \mathcal{B}(n,\frac{\lambda}{n})$ $(0 < \lambda < 1)$. Montrer que X_n converge en loi vers une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ.

4.19. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme $X_n \sim \mathcal{U}(1,\ldots,n)$. Montrer que $\frac{X_n}{n}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}_{[0,1]}$.

4.20. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi géométrique $X_n \sim \mathcal{G}(\frac{p}{n})$ $(0 < p < 1)$. Montrer que $\frac{X_n}{n}$ converge en loi (à l'aide des fonctions caractéristiques et des fonctions de répartition).

4.21. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires réelles telles que pour tout n X_n et Y_n sont indépendantes. On suppose que X_n converge en loi vers une variable X et Y_n converge en loi vers une variable Y. Montrer que la suite des couples (X_n,Y_n) converge en loi.

4.22. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et soit $U \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$. On pose

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k}.$$

(i) Montrer que la fonction caractéristique de Y_n peut se mettre sous les deux formes suivantes:

$$\varphi_{Y_n}(t) = e^{\frac{it}{2}} e^{-\frac{it}{2^{n+1}}} \cos(\frac{t}{4}) \cos(\frac{t}{8}) \cos(\frac{t}{16}) \ldots \cos(\frac{t}{2^{n+1}}) = e^{\frac{it}{2}} e^{-\frac{it}{2^{n+1}}} (\frac{1}{2})^n \frac{\sin(\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2^{n+1}})}.$$

(ii) En déduire que Y_n converge en loi vers U.

4.23. Soit $\psi : [0,1] \to [0,1]$ et soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose

$$I = \int_0^1 \psi(x)dx, \; Y_k = \begin{cases} 1 & \text{si } \psi(U_{2k}) \geqslant U_{2k+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(i) Montrer que les variables aléatoires Y_k sont indépendantes et trouver leurs lois.
(ii) Montrer que, lorsque $n \to \infty$

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{n}(Y_1 + \ldots + Y_n) \xrightarrow{\text{p.s.}} I.$$

(iii) *(méthode de Monte-Carlo simple)*
On veut estimer I à l'aide de $\bar{Y}_n$ et l'erreur relative est

$$\varepsilon_n = \frac{|\bar{Y}_n - I|}{I}.$$

Donner un majorant de $\mathrm{P}(\varepsilon_n > \alpha)$ en termes de α, I, n.
(iv) Supposons que des estimations ont permis par ailleurs de voir que $I > 0{,}5$. À partir de quelle valeur de n s'assure-t-on 19 chances sur 20 de faire une erreur relative inférieure à 1% en estimant I?

4.24. Soit $f : \mathbb{R} \to [0,\infty[$ une densité de probabilité et soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue. On pose

$$I = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)f(x)dx.$$

(i) *(méthode de Monte-Carlo simple)*
Montrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes ayant la même densité f alors, lorsque $n \to \infty$

$$\frac{1}{n}(\psi(X_1) + \ldots + \psi(X_n)) \xrightarrow{\text{p.s.}} I.$$

(ii) *(méthode de Monte-Carlo avec rejet)*
Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$ indépendante de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et soit $g : \mathbb{R} \to [0,\infty[$ une densité de probabilité telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{g(x)}{f(x)} \leqslant c$ pour une certaine constante c. Montrer que, lorsque $n \to \infty$

$$\frac{c}{n} \sum_{j=1}^{n} \psi(X_j) \mathbb{1}_{g(X_j) < cU_j f(X_j)} \xrightarrow{\text{p.s.}} \int_{\mathbb{R}} \psi(x)g(x)dx.$$

(iii) *(facultatif)* On pose

$$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } cU_n < \frac{g(X_n)}{f(X_n)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Bernoulli indépendante. On pose

$$N(n) = \min\{k \in \mathbb{N} : Y_1 + \ldots + Y_k = n\}.$$

Donner un equivalent presque sûr de $N(n)$. On considère les variables aléatoires

$$Z_1 = X_{N(1)}, \ldots, Z_n = X_{N(n)}, \ldots$$

Montrer que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de densité g. En déduire que, lorsque $n \to \infty$

$$\frac{1}{n}(\psi(Z_1) + \ldots + \psi(Z_n)) \xrightarrow{\text{p.s.}} \int_{\mathbb{R}} \psi(x)g(x)dx.$$

4.25. *(formule d'inversion de transformée de Laplace de Post-Widder)*
Soit $f : [0,\infty[\to [0,\infty[$ une fonction (densité de probabilité) continue bornée. On rappelle que la transformée de Laplace de f est la fonction

$$g(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx.$$

(i) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\frac{1}{x})$. Quelle sont les densités de $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et de $\frac{S_n}{n}$.
(ii) Montrer que g est indéfinement dérivable sur $]\varepsilon,\infty[$, pour tout $\varepsilon > 0$, de dérivée n-ième donnée sur $]0,\infty[$ par

$$g^{(n)}(s) = (-1)^n \int_0^\infty x^n e^{-sx} f(x)dx.$$

(iii) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = f(x).$$

(iv) En déduire la formule d'inversion de Post-Widder:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^n g^{(n-1)}(\frac{n}{x})}{x^n (n-1)!} = f(x),$$

et l'injectivité de la transformée de Laplace vue comme application de l'espace des fonctions continues bornées dans l'espace des fonctions continues.

4.26. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi de Poisson $X_n \sim \mathcal{P}(a_n)$ $(a_n > 0)$. On note $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ et $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. On suppose que $lim_{n\to\infty} s_n = \infty$.
(i) Montrer que, lorsque $n \to \infty$

$$\frac{S_n - s_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{loi}} G \sim \mathcal{N}(0,1).$$

(ii)* On suppose que tous les $a_n = 1$ et on pose $T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$. Pourquoi pour tout $x > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(x \leqslant T_n) = \mathrm{P}(x \leqslant G)$? À l'aide de l'inégalité Bienaymé-Tchebytchev montrer que on peut dominer $\mathrm{P}(x \leqslant T_n)$ par une fonction intégrable sur $]0,\infty[$. En déduire,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(T_n^+) = \mathrm{E}(G^+) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Prouver la formule de Stirling: lorsque $n \to \infty$,

$$\frac{e^{-n} n^n \sqrt{n}}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

4.27 Une usine fabrique des pièces dont 3% ont des défauts.
(i) On prélève 1000 pièces au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir plus de 50 pièces défectueuses? d'avoir entre 20 et 40 pièces défectueuses?
(ii) On veut 1950 pièces sans défaut. Par prudence on prélève 2000 au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir suffisament de pièces en bon état?

4.28. Deux sondages effectués l'un auprès de 800 Françaises, l'autre auprès de 800 Français donnet 51% de fumeuses et 49% de fumeurs. Est-il raisonnable d'en déduire que les femmes fument plus que les hommes en France?

4.29. Dans une population de 56680 familles lapins ayant 8 petits chacunes (donc 429440 lapereaux au total) il y a 221023 mâles et 208417 femelles. On se demande si le nombre de lapereaux mâles est significativement plus élevé que celui de lapereaux femelles? Autrement dit on voudrait tester l'hypothèse : les chances sont égale d'avoir un mâle ou une femelle avec un risque d'erreur de 5%.

4.30. Suivant l'hypothèse de Mendel sur la couleur des yeux (bleu récessif, marron dominant) une personne prise au hasard a une chance sur quatre d'avoir les yeux bleus. Si cette hypothèse est valide, combien de personnes doit-on observer pour être quasi-certain avec une probabilité de 99,8% que la proportion de personnes aux yeux marron sera comprise entre 0,7 et 0,8?