Université de Rennes 1 | Magistère Mathématiques 1ère année
ENS Cachan, antenne de Bretagne | Année 2011 - 2012

Probabilités de base : contrôle continu no. 2

mercredi 14 mars 2012 - durée 1 heure - résumé autorisé

Exercice I.

Soit $\{A_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite d'événements indépendants dans un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ satisfaisant $\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{P}(A_n) = \infty$. Soit A un autre événement tel que $\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{P}(A_n \cap A) < \infty$. Quelles sont les valeurs possibles pour $\mathrm{P}(A)$?

Exercice II.

On s'intéresse à la loi de la variable aléatoire produit $Z = XY$ de deux variables aléatoires réelles X et Y. Les deux questions sont indépendantes :

1. Calculer la densité de Z lorsque le couple (X, Y) est de densité

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(1+y)} & \text{si } x > 0, y > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Trouver la fonction caractéristique de Z lorsque les variables sont indépendantes, X est de fonction caractéristique φ et $Y \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$.

Exercice III.

1. On dispose d'une pièce qui montre pile avec probabilité $p \in]0,1[$. On effectue une série de $n \geqslant 1$ lancers indépendants de cette pièce et on note $X_j \in \{0,1\}$ le nombre de pile obtenu au lancer numéro $j \in \{1, \dots, n\}$. On pose $S_n := X_1 + \ldots + X_n$.
   (a) Trouver les lois de $X_1, \dots, X_n$ et de S_n. Justifier succintement vos réponses.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de $\frac{S_n}{n}$. Vérifier que $\mathrm{Var}(\frac{S_n}{n}) \leqslant \frac{1}{4n}$.
2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $\mathrm{E}\big[f(\frac{S_n}{n})\big]$ est un polynôme de degré au plus n, noté $B_n(p)$.
3. On désigne par $\|f\|_\infty$ la norme uniforme de f sur $[0,1]$ et par $m_f(\delta) := \sup\{|f(u) - f(v)| : 0 \leqslant u, v \leqslant 1, |u - v| \leqslant \delta\}$ $(\delta > 0)$ son module de continuité. Montrer que, pour tout $p \in [0,1]$ et tout $\delta > 0$,

$$|f(p) - B_n(p)| \leqslant m_f(\delta)\mathrm{P}\big(\big|\frac{S_n}{n} - p\big| \leqslant \delta\big) + 2\|f\|_\infty \mathrm{P}\big(\big|\frac{S_n}{n} - p\big| > \delta\big).$$

4. En déduire que, pour tout $p \in [0,1]$, $|f(p) - B_n(p)| \leqslant m_f(\delta) + \dfrac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$.
   Que vaut $\lim_{n\to\infty} \|f - B_n\|_\infty$? Quel résultat remarquable vous évoque cette limite ?