Université de Rennes 1
ENS Cachan, antenne de Bretagne

Magistère Mathématiques 1ère année
Année 2010 - 2011

Probabilités de base : contrôle continu no. 2

vendredi 18 mars 2011 - durée 1 heure - résumé autorisé

Exercice I.

Soit $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance I_3. Montrer que la variable aléatoire

$$N := \frac{G_1 + G_2 G_3}{\sqrt{1 + G_3^2}}$$

est une variable aléatoire gaussienne dont on indiquera l'espérance et la variance. On pourra calculer la fonction caractéristique de N.

Exercice II.

On suppose que les variables aléatoires S et T sont indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ. Montrer que les variables aléatoires $S + T$ et S/T sont indépendantes.

Exercice III.

Considérons $\{Y_n\}_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Cauchy. Montrer que pour tout $t > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}\left(\frac{1}{n} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} Y_j < t\right) = \exp\left(-\frac{1}{\pi t}\right).$$

Exercice IV.

Considérons $\{Y_n\}_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Montrer qu'il existe un $c > 0$ tel que $\sum_{n \geqslant 1} \mathrm{P}(Y_n > c \ln n) < \infty$.
2. En déduire que $\mathrm{P}\left(Y_n = O(\ln n) \text{ quand } n \to \infty\right) = 1$.