Université de Rennes 1
ENS Cachan, antenne de Bretagne

Magistère Mathématiques 1ère année
Année 2009 - 2010

Probabilités de base : contrôle continu no. 2

mercredi 24 mars 2010 - durée 1 heure - résumé autorisé

Exercice I.

1. On note $\mathbb{U}_{a,b}$ la loi d'une variable aléeatoire uniforme sur l'intervalle $[a,b]$. Calculer la fonction caractéristique associée à cette probabilité.
2. Calculer la densité f ainsi que la fonction caractéristique φ associées à la probabilité convolution $\mathbb{U}_{-1,0} \star \mathbb{U}_{0,1}$.
3. Étudier l'intégrabilité de la fonction φ.
4. En déduire que la fonction $x \mapsto (1-|x|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$ est une fonction caractéristique et que la fonction $x \mapsto \frac{(1-\cos x)}{(\pi x^2)}$ est une densité de probabilité.

Exercice II.

Soit $\{(X_n, Y_n)\}_{n \geqslant 1}$ une suite de couples aléatoires gaussiens centrés tels que $\mathrm{E}(X_n^2) = \mathrm{E}(Y_n^2) = 1$ et $\mathrm{E}(X_n Y_n) = \rho_n$.

1. Montrer que $|\rho_n| \leqslant 1$.
2. On suppose que $\sum_{n \geqslant 1}(1-\rho_n) < \infty$. Étudier la convergence presque sûre et en probabilité de la suite $\{X_n - Y_n\}_{n \geqslant 1}$.

Exercice III.

Soient $X \sim \gamma(2,1)$ et $Y \sim \mathcal{E}(1)$ deux variables aléatoires réelles indépendantes. Montrer que la variable aléatoire $Z = \frac{X}{Y}$ est bien définie et calculer sa densité. Pour quels $p \in \mathbb{R}^{+*}$, a-t-on $Z \in L^p$?

Exercice IV.

Montrer que, pour tout $\lambda > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \left|\frac{\lambda}{\lambda - it}\right|^{2n}$ est une fonction caractéristique.