Université de Rennes 1
ENS Cachan, antenne de Bretagne

Magistère Mathématiques 1ère année
Année 2011 - 2012

Probabilités de base : contrôle continu no. 1

mercredi 8 février 2012 - durée 1 heure - résumé autorisé

Exercice I.

Soient A, B deux événements dans un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. Vérifier les égalités : $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ et $|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B| = \mathbb{1}_{A\Delta B}$. En déduire que $|\mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B)| \leqslant \mathrm{P}(A\Delta B)$. Montrer que $|\mathrm{P}(A \cap C) - \mathrm{P}(B \cap C)| \leqslant \mathrm{P}(A\Delta B)$, où C est un troisième événement.

Exercice II.

Soient X une variable aléatoire réelle ayant la fonction de répartition F, et deux réels $r < R$. Tracer les fonctions de répartition des variables "tronquées" Y et Z données par

$$Y = \begin{cases} r & \text{si } X < r, \\ X & \text{si } r \leqslant X \leqslant R, \\ R & \text{si } X > R \end{cases} \qquad \text{et} \qquad Z = X\mathbb{1}_{|X|\leqslant R} = \begin{cases} X & \text{si } |X| \leqslant R, \\ 0 & \text{si } |X| > R. \end{cases}$$

Quel est le comportement de ces fonctions de répartition lorsque $r \to -\infty$, $R \to \infty$? Justifier toutes vos réponses.

Exercice III.

Soit W une variable aléatoire réelle intégrable et notons $m := \mathrm{E}(W)$. Pour $\alpha, t \in \mathbb{R}$ on introduit

$$\Lambda(\alpha) := \ln \mathrm{E}\big(e^{\alpha W}\big) \qquad \text{et} \qquad \Lambda^\star(t) := \sup_{\alpha\in\mathbb{R}} \big(\alpha t - \Lambda(\alpha)\big).$$

Supposons que $\mathrm{E}\big(e^{\alpha W}\big) < +\infty$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\Lambda(0) = 0$ et déduire que $\Lambda^\star(t) \geqslant 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. Vérifier que, $\alpha m \leqslant \Lambda(\alpha)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. On pourra utiliser l'inégalité de Jensen.
   En déduire que $\Lambda^\star(m) = 0$. Vérifier ensuite les égalités :

   $$\Lambda^\star(t) = \sup_{\alpha\geqslant 0} \big(\alpha t - \Lambda(\alpha)\big),\ \forall t \geqslant m \qquad \text{et} \qquad \Lambda^\star(t) = \sup_{\alpha\leqslant 0} \big(\alpha t - \Lambda(\alpha)\big),\ \forall t \leqslant m.$$

3. Vérifier que $\Lambda^\star$ est une fonction convexe, croissante sur $[m, +\infty)$ et décroissante sur $(-\infty, m]$.
4. Montrer que

   $$\mathrm{P}(W \geqslant t) \leqslant e^{-\Lambda^\star(t)},\ \forall t \geqslant m \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}(W \leqslant t) \leqslant e^{-\Lambda^\star(t)},\ \forall t \leqslant m.$$

   On pourra remarquer, par exemple, que $\mathrm{P}(W \geqslant t) = \mathrm{P}(e^{\alpha W} \geqslant e^{\alpha t})$, pour tout $\alpha > 0$, puis utiliser l'inégalité de Markov, ainsi que les résultats du point 2.