Université de Rennes 1
ENS Cachan, antenne de Bretagne

Magistère Mathématiques 1ère année
Année 2010 - 2011

Probabilités de base : contrôle continu no. 1

vendredi 4 février 2011 - durée 1 heure - résumé autorisé

Exercice I.

Soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

a) Démontrer que si F est la fonction de répartition associée à μ alors $\mu(\{t\}) = F(t) - F(t-)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

b) Un atome de la probabilité μ est un singleton $\{t\}$ tel que $\mu(\{t\}) > 0$. Montrer que le nombre d'atomes d'une probabilité sur $\mathbb{R}$ est au plus dénombrable. On pourra étudier le cardinal de l'ensemble $\{t : F(t) - F(t-) \geqslant n^{-1}\}$, $n \geqslant 1$ entier.

Exercice II.

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F continue. Montrer que $F(X)$ est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et que $-\ln F(X)$ est une variable aléatoire de loi exponentielle. On pourra introduire $G(u) := \inf\{t : F(t) \geqslant u\}$ pour $u \in]0,1]$ et remarquer que $F(G(u)) = u$.

Exercice III.

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

a) On suppose que V est une variable aléatoire discrète à valeurs entières $n \geqslant 1$ qui sont prises avec probabilités $p_n = c2^{-n}/n$, $c > 0$. Trouver la valeur de la constante c et calculer $\mathrm{P}(V > 1)$, la probabilité que V soit paire, ainsi que $\mathrm{E}(V)$.

b) Vérifier que la fonction $F(x) = (1 - e^{-\theta x^\beta})\mathbb{1}_{x \geqslant 0}$, est une fonction de répartition, $\theta, \beta > 0$. Soit T une variable aléatoire avec fonction de répartition F. Justifier l'existence et calculer $\mathrm{E}(T^p)$, $p > 0$.

Exercice IV.

Soit Y une variable aléatoire réelle de carré intégrable telle que $\mathrm{E}(|Y|) \geqslant t > 0$ et $\mathrm{E}(|Y|^2) = 1$. Montrer que, pour tout $\alpha \in [0,1]$, $\mathrm{P}(|Y| \geqslant \alpha t) \geqslant (1-\alpha)^2 t^2$. On rappelle que si Z est une variable aléatoire positive et A un événement, $\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(Z\mathbb{1}_A) + \mathrm{E}(Z\mathbb{1}_{A^c})$.