Université de Rennes 1 | Magistère Mathématiques 1ère année
ENS Cachan, antenne de Bretagne | Année 2009 - 2010

Probabilités de base : contrôle continu no. 1

mardi 16 février 2010 - durée 1 heure - résumé autorisé

Exercice I.

Supposons que les évènements B et C de l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ sont tels que $\mathrm{P}(B) = p_b$ et $\mathrm{P}(C) = p_c$ $(0 < p_b, p_c < 1)$. On introduit une suite d'événements, définie pour $n \geqslant 1$ entier par $A_n := \begin{cases} B & \text{si } n \text{ impair} \\ C & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$ Trouver $\limsup_n A_n$, $\liminf_n A_n$ et calculer $\mathrm{P}(\limsup_n A_n) + \mathrm{P}(\liminf_n A_n)$.

Exercice II.

On suppose que G est une variable aléatoire gaussienne standard $\mathcal{N}(0,1)$. Trouver la densité f_Z de la variable $Z = e^G$. Calculer $\mathrm{E}(Z^n)$, pour $n \geqslant 1$ entier.

Exercice III.

Soit T une variable aléatoire réelle strictement positive. On note par F sa fonction de répartition : que vaut $F(0)$? On introduit $U := \max\{T, \frac{1}{T}\}$. Montrer que U est une variable aléatoire et calculer sa fonction de répartition. Si T admet une densité f, trouver, si elle existe, la densité de U.

Exercice IV.

Soit $\{X_n\}_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge en probabilité vers une variable aléatoire réelle X. Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. On suppose que pour tout $n \geqslant 1$ entier la variable aléatoire X_n est de loi gaussienne centrée et de variance $\frac{3}{n}$. Montrer que $\{X_n\}_{n \geqslant 1}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire X que l'on déterminera. On pose $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Montrer que $\{h(X_n)\}_{n \geqslant 1}$ ne converge pas en probabilité vers $h(X)$.
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Démontrer que la suite de variables aléatoires $\{g(X_n)\}_{n \geqslant 1}$ converge en probabilité vers $g(X)$. Montrer que la même conclusion s'obtient en supposant seulement g continue. On pourra d'abord vérifier que, pour tous $n, N \geqslant 1$ entiers, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_{\varepsilon,N}$ (qui dépend uniquement de ε et N) tel que

$$\{|g(X_n) - g(X)| > \varepsilon\} \subset \{|X_n - X| > \delta_{\varepsilon,N}\} \cup \{|X| > N\}.$$