Université de Rennes 1 | Année 2015-2016
Master 1 Mathématiques | Chaînes de Markov et martingales

Contrôle continu # 3

Durée 2 heures, aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 *(Calculs d'espérance conditionnelle)*
Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires réelles telles que X_1 admet une densité f_1 donnée par

$$f_1(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{-x} \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}} ,$$

et pour toute fonction mesurable $h \geq 0$ on a

$$\mathbb{E}\big[h(X_2)|X_1\big] = \int_0^{X_1} h(y)\, \frac{2y}{X_1^2}\, dy.$$

a) Quelle est la loi du couple (X_1, X_2) ? On vérifiera que l'intégrale de sa densité vaut 1.

b) Pour $h \geq 0$ une fonction mesurable donner l'expression de $\mathbb{E}\big[h(X_1)|X_2\big]$. Que vaut $\mathbb{E}(X_1|X_2)$?

Exercice 2 *(Martingale gaussienne)*
Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que, pour tout $n \geq 0$ le vecteur aléatoire $(M_0, M_1, \ldots, M_n)$ est un vecteur gaussien. On note $(\mathcal{F}_n^M)_{n\geq 0}$ la filtration naturelle associée au processus $(M_n)_{n\geq 0}$. Montrer l'équivalence des affirmations suivantes :

(i) $(M_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n^M)$-martingale.

(ii) Il existe un réel μ et une suite de nombre réels $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ tels que

$$\mathbb{E}(M_n) = \mu, \quad \mathrm{Cov}(M_n, M_m) = \sigma^2_{\min\{n,m\}} , \qquad \text{pour tous } n, m \in \mathbb{N}.$$

(iii) Il existe une suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes centrées $(D_n)_{n\geq 0}$ telle que

$$M_n = D_0 + D_1 + \ldots + D_n + \mathbb{E}(M_0), \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On pourra montrer que (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(i).

Exercice 3 *(Une autre urne de type Polya)*
On considère une urne dans laquelle se trouvent initialement trois boules vertes et une boule bleue. On dispose par ailleurs d'un stock infini de boules vertes et bleues. A chaque instant entier strictement positif on tire une boule dans l'urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne et on mélange, puis on tire à nouveau une boule dans l'urne et on note sa couleur et on la remet dans l'urne. Si on tiré deux boules bleues on rajoute dans l'urne deux boules bleues, si on a tiré deux boules vertes on rajoute dans l'urne deux boules vertes et si on a tiré une boule verte et une boule bleue on rajoute une verte et une bleue. A chaque instant $n \geq 0$ il y a $4 + 2n$ boules dans l'urne. On note V_n le nombre de boules vertes dans l'urne et on pose $X_n = V_n/(4 + 2n)$. On introduit la tribu $\mathcal{F}_n = \sigma(V_0, V_1, \ldots, V_n)$, $n \geq 0$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{E}(V_{n+1} - V_n|\mathcal{F}_n) = 2\, X_n$.

b) En déduire que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.

c) Que peut-on dire de X_n quand $n \to \infty$?

d) Soit T un temps d'arrêt. A-t-on forcément $\mathbb{E}(X_T) = 3/4$?

e) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Donner une majoration non-triviale de la probabilité $\mathbb{P}(\max_{0\leq n\leq N} X_n \geq 7/8)$.

f) Montrer qu'avec probabilité strictement positive la proportion des boules vertes reste toujours strictement inférieure à 7/8.

Tourner S.V.P.

Exercice 4 *(Un autre modèle de type Ehrenfest)*
On considère quatre boules numérotées de 1 à 4 réparties dans deux urnes A et B. A chaque unité de temps on un tire un nombre k au hasard entre 1 et 4, on enlève la boule numéro k de l'urne dans laquelle elle se trouve et on la remet au hasard dans l'une des deux urnes. On note X_n le nombre de boules dans l'urne A à l'instant n.

a) Justifier en une phrase le fait que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $E = \{0, \ldots, 4\}$. Donner sa matrice de transition P.

b) La chaîne est-elle irréductible ? récurrente positive ? apériodique ?

c) Supposons que la loi de X_0 est une loi binomiale $\mathcal{B}(4, 1/2)$. Trouver la loi de X_1.

d) Trouver la loi stationnaire $\mathtt{m}$ de la chaîne. Que vaut $\lim_{n\to\infty} p^{(n)}(x, y)$?

e) On commence avec l'urne A vide. Au bout d'un temps supposé suffisamment grand on observe le nombre de boules dans l'urne A. Quelle est (à peu de choses près) la probabilité que ce nombre soit pair ? Un calcul est attendu pour cette question.

f) On commence avec l'urne A pleine. On observe une trajectoire de la chaîne $(X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots)$. Donner une approximation de la proportion du temps où il y a strictement moins de boules dans l'urne A que dans l'urne B ?