Université de Rennes 1 | Année 2020-2021
Licence de Mathématiques | L2 CMR

Contrôle continu # 3

le 9 avril 2021 ; durée 1 heure

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction dans l'évaluation. Bon travail !

Exercice 1 *Questions de cours ou presque*

Les trois questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit (a_n) une suite bornée de nombres complexes. Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$.
2. Soit (w_n) une suite de nombres complexes et on note $a_n = \mathrm{Re}(w_n)$ et $b_n = \mathrm{Im}(w_n)$. On note R, R_a, R_b les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n\geq 0} w_n z^n$, $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$. Montrer que $R = \min(R_a, R_b)$.
3. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série divergente à termes réels strictement positifs. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et on suppose que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{S_n} = 0$. Quels sont les rayons de convergence R_u de $\sum_{n\geq 0} u_n z^n$ et respectivement R_s de $\sum_{n\geq 0} S_n z^n$? On pourra montrer que $R_s \leq R_u \leq 1$ et on calculera R_s.

Exercice 2 *Rayons de convergence*

Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cosh n}{\sinh^2 n} z^n; \quad \sum_{n\geq 0} (1+2i)^n z^n; \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(2n)!}{n! n^n} z^n; \quad \sum_{n\geq 2} \left(n + (-1)^{n-1}\sqrt{n}\right)^{-1/2} z^n.$$

Exercice 3 *Une série entière*

Soit la série entière $S(t) = \sum_{n\geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) t^n$.

1. Trouver le rayon de convergence de cette série entière.
2. Montrer que pour tout t dans l'intervalle de convergence $(1-t)S(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n}$.
3. Que vaut S sur son domaine de définition ?

Exercice 4 *Fonction développable en série entière, calculs d'intégrale et de série*

1. Soit a un réel arbitraire $a \in [-1, 1]$. Trouver le développement en série entière autour de 0 de la fonction $t \mapsto \frac{1-t}{1-a\,t^3}$ et préciser l'intervalle maximal sur lequel ce développement a lieu.
2. Montrer que, pour tout $a \in [-1, 1]$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{1-a\,t^3}\,dt = \sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{(3n+1)(3n+2)}$.

   Justifier soigneusement votre raisonnement. On pourra remarquer, par exemple, que
   $$\left| \int_0^1 (1-t) \sum_{n\geq N+1} (at^3)^n dt \right| \leq \int_0^1 \frac{(1-t)t^{3N+3}}{1-t^3} dt \leq \int_0^1 t^{3N+3} dt \to 0, \quad \text{quand } N \to \infty.$$
3. En déduire la somme de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$.