Université de Rennes 1 — Année 2021-2022
Master 1 Mathématiques — Analyse Fonctionnelle

# Contrôle continu # 3

le 15 décembre 2021 ; durée 2h30 ; trois feuilles résumés autorisées

**Exercice 1** *Questions de cours (ou presque)*
Soient $E$ un espace de Banach. Les questions suivantes sont indépendantes.

a) Fournir une démonstration du fait que $E$ est réflexif si et seulement si $E'$ est réflexif.

b) Soit $T \in B(E)$ et soit $\lambda_0 \in \rho(T)$. Montrer que $R_T(\lambda_0)$ est un opérateur compact alors pour tout $\lambda \in \rho(T)$, $R_T(\lambda)$ est compact.

c*) Soit $T \in B(E)$ un opérateur compact tel que $T^2 = T$. Montrer que $T$ est de rang fini. On pourra noter $F := T(E)$, chercher à expliciter l'opérateur $T_{|F}$ et trouver ses propriétés.

Dans la suite de l'exercice on suppose que l'espace $E$ est réflexif.

d) On désigne par $G$ un sous-espace vectoriel fermé de $E$. Montrer que ${}^{\perp}(G^{\perp}) = J_E(G)$.

e) Soit $F$ un autre espace de Banach et soit $T \in B(E,F)$. Montrer que $T \in K(E,F)$ si et seulement si $T$ transforme les suites faiblement-$\sigma(E,E')$ convergentes en suites (fortement) convergentes.

f) On suppose que $E$ est un $\mathbb{C}$-espace de Hilbert avec le produit scalaire $\langle , \rangle$ et soit $T$ un opérateur normal, i.e. $TT^* = T^*T$. Montrer que son rayon spectral satisfait $r(T) = \|T\|$.

**Exercice 2** *Suite de valeurs résolvantes*
Soient $E$ un espace de Banach, $T \in B(E)$ et $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\rho(T)$ convergente vers $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que si la suite d'opérateurs $(R_T(\lambda_n) = (\lambda_n I - T)^{-1})_{n\geq 1}$ est bornée dans $B(E)$, alors $\lambda \in \rho(T)$.

**Exercice 3** *Opérateur isométrique*
Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace de Banach et soit $T \in B(E)$ vérifiant $\|Tx\| = \|x\|$, pour tout $x \in E$.

a) Montrer que $\mathrm{vp}(T) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} := \mathbb{S}$ et $\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} =: \overline{\mathbb{D}}$

b) Soit $\lambda \in \mathbb{D}$. Alors $\lambda \in \rho(T)$ si et seulement si $R(\lambda I - T) = E$.

c) Soit $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{D} \cap \rho(T)$ convergente vers $\lambda \in \mathbb{D}$. Montrer que $\|R_T(\lambda_n)\| \leq (1-|\lambda_n|)^{-1}$. En déduire que $\lambda\rho(T)$ (utiliser l'exercice précédent).

d) Démontrer que $\mathbb{D} \cap \rho(T)$ est fermé et ouvert dans $\mathbb{D}$.

e) Déduire $\sigma(T)$ est soit contenu dans $\mathbb{S}$, soit égal à $\overline{\mathbb{D}}$.
Bonus : Donner une CNS pour que le premier cas a lieu.

**Exercice 4** *Opérateur de multiplication*
Soit $(\alpha_n)$ est une suite de nombres complexes et soit $1 \leq p < \infty$. On pose $T : \ell^p \to \ell^p$ l'application linéaire définie par $(Tx)_n = \alpha_n \xi_n$, lorsque $x = (\xi_n) \in \ell^p$.

a) Montrer que $T$ est borné ssi $(\alpha_n)$ est bornée.

b) Montrer que $T$ est compact ssi $(\alpha_n)$ tend vers 0.

c) Calculer ses valeurs propres et son spectre.

**Tournez S.V.P.**

**Exercice 5** *Un opérateur de Fredholm*
Soit l'espace de Hilbert $E = \mathrm{L}^2([0,1])$ et soit l'opérateur $T : E \to E$ défini par

$$\forall t \in [0,1] \quad Tx(t) = \int_0^1 e^{|t-s|} x(s) ds.$$

a) Montrer que l'opérateur $T$ est bien défini, qu'il est linéaire borné et $\|T\| \leq 1$.

b) Montrer que $T$ est auto-adjoint compact.

c) Préciser quelle peut être la structure de l'ensemble $\sigma(T) \setminus \{0\}$. 0 est-elle valeur spectrale de $T$ ? Préciser la position de l'ensemble $\sigma(T)$ par rapport à l'intervalle $[-1,1]$.

d) Montrer que si $x \in \mathrm{C}([0,1])$, $y = Tx$ vérifie $y(t) = e^{-t} \int_0^t e^s x(s) ds + e^t \int_t^1 e^{-s} x(s) ds$, $\forall t \in [0,1]$, et que $y \in \mathrm{C}^2([0,1])$. Déduire que $y$ satisfait l'équation différentielle avec conditions au bord

$$y'' - y = -2x, \quad \text{avec} \quad y(0) = y'(0), \ y(1) = -y'(1).$$

e) Montrer que si $x \in \mathrm{C}([0,1])$, et $y = Tx$ alors

$$2\langle Tx, x \rangle = \int_0^1 |y(t)|^2 dt + \int_0^1 |y'(t)|^2 dt + |y(0)|^2 + |y(1)|^2.$$

Que peut-on déduire sur $\sigma(T)$ ?