Contrôle continu # 3

le 18 décembre 2020 ; durée 2h30 ; trois feuilles résumés autorisées

Exercice 1 *Questions de cours (ou presque)*

a) Soit E un espace normé et soit $\emptyset \neq C \subset E$ un ensemble convexe ouvert contenant l'origine. On note p_C la fonctionnelle de Minkowski de C, $p_C(x) = \inf\{t > 0 : \frac{1}{t}x \in C\}$. On pose

$$\Gamma := \big\{f \in E' : \forall x \in E, f(x) \leq p_C(x)\big\}.$$

Montrer que le convexe C est une intersection de demi-espaces ouverts affines

$$C = \bigcap_{f\in\Gamma} \{x \in E : f(x) < 1\}.$$

b) Soient E, F deux espaces normés. On rappelle que si $T \in B(E, F)$ son dual est $T' \in B(F', E')$ défini par $\langle T'g, x\rangle_{E',E} = \langle g, Tx\rangle_{F',F}$, pour tout $x \in E$ et $g \in F'$. Vérifier que :

i) $(I_E)' = I_{E'}$ et $(ST)' = T'S'$, où $T \in B(E, F)$, $S \in B(F, G)$ et G est un espace normé ;

ii) $(T')^{-1} = (T^{-1})'$, lorsque $T \in B(E, F)$ est inversible ; déduire que si T est un isomorphisme isométrique alors T' est un isomorphisme isométrique ;

iii) $J_F \circ T = (T')' \circ J_E$, où $T \in B(E, F)$ et $J_E : E \hookrightarrow E''$ et $J_F : F \hookrightarrow F''$ sont les inclusions canoniques ; déduire que si E, F sont réflexifs et si T' est un isomorphisme isométrique, alors T est un isomorphisme isométrique.

Déduire que si E est un espace réflexif isomorphe avec F alors F est aussi un espace réflexif.

c) Soit $T \in B(E)$ une application linéaire bornée sur un espace de Banach E et soit $\lambda \in \sigma(T)\backslash \mathrm{vp}(T)$. Montrer que pour tout opérateur compact $S \in K(E)$, $\lambda \in \sigma(T + S)$.

d) Soit $A \in B(H)$ un opérateur linéaire autoadjoint sur un espace de Hilbert H et soit $\lambda \in \rho(A)$ un élément de l'ensemble résolvant. Montrer que sa résolvante $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur normal, c'est-à-dire $R(\lambda)^*R(\lambda) = R(\lambda)R(\lambda)^*$.

e) On rappelle qu'un opérateur $U \in B(H)$ sur un espace de Hilbert H est dit unitaire si $UU^* = U^*U = I$. Montrer qu'alors $U \in B(H)$ est une isométrie bijective, et que $\sigma(U) \subset \mathbb{S}^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

Exercice 2 *Un opérateur intégral*

Soient $a < b$ deux réels et on considère l'application $Q : \mathrm{C}([a, b]) \to \mathrm{C}([a, b])$ définie par

$$Qx(t) = \int_a^t \frac{x(u)}{\sqrt{t-u}}du.$$

Montrer que Q est une application linéaire continue, calculer $\|Q\|$ et vérifier que le rayon spectral de Q satisfait $r(Q) \leq 2\sqrt{b-a}$.

Tournez S.V.P.

Exercice 3 *Compact et non-compact*
Soit E un des espaces $c_0(\mathbb{N}^*)$ ou $\ell^\infty(\mathbb{N}^*)$. On considère l'application $L : E \to E$ donnée par $L(x_1, x_2, \ldots,) = (0, x_1, 0, x_3, 0, \ldots)$. Montrer que L n'est pas compact mais que L^2 est compact.

Exercice 4 *Opérateur primitive*
Sur l'espace des fonctions de carré intégrable $H = \mathrm{L}^2([0,1])$ sur $[0,1]$ on introduit l'opérateur V donné par

$$Vx(t) = \int_0^t x(s)ds = \int_0^1 K(t,s)x(s)ds,\ t \in [0,1],\ x \in \mathrm{L}^2([0,1]),$$

où, pour $t, s \in [0,1]$, $K(t,s) = \mathbb{1}_{\{0 \leq s \leq t\}}$.

a) Montrer que $V(H) \subset H$ et que $V : H \to H$ est continu, compact. On pourra montrer d'abord que $V(E) \subset E$ avec $E = \mathrm{C}([0,1])$ et utiliser le théorème d'Ascoli.

b) Vérifier que $\sigma(V) = \{0\}$. On pourra étudier les valeurs propres de V en dérivant Vx.

c) Trouver l'expression de V^*.

d) VV^* est-il compact ? autoadjoint ? positif ?

e) Montrer que $\|VV^*\| = \frac{4}{\pi^2}$ et déduire la valeur de $\|V\|$. On pourra montrer (en utilisant une équation différentielle linéaire du second ordre), que les valeurs propres de VV^* sont $\big\{(n\pi + \frac{\pi}{2})^{-2} : n \in \mathbb{N}\big\}$.