Contrôle continu # 3

le 13 décembre 2018 ; durée 2h30 ; trois feuilles résumé autorisées

Exercice 1 *Quand le microprocesseur s'emballe*
Soient $\lambda > 0$ et $a < b$ des réels. On suppose que le nombre $N_{a,b}$ d'instructions arrivant au microprocesseur d'un ordinateur pendant l'intervalle de temps $[a, b]$ est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda(b-a)$: $\mathbb{P}(N_{a,b} = k) = \exp(-\lambda(b-a))(\lambda(b-a))^k/k!$, $k \in \mathbb{N}$.

a) Donner $\mathbb{E}(N_{a,b})$.

b) On note X_j (respectivement D_j) le temps utilisé par le microprocesseur pour exécuter la j-ième instruction (respectivement le moment où le microprocesseur commence à exécuter cette j-ième instruction). On note A_j le nombre d'instructions arrivées pendant l'exécution de la j-ième instruction (elles sont placées dans une file d'attente). Quelle est la loi conditionnelle de A_j sachant $(X_j, D_j) = (x, d)$? Quelle est la loi conditionnelle de A_j sachant seulement X_j ? En supposant que X_j est de densité de probabilité f, exprimer $\mathbb{P}(A_j = \ell)$ comme une intégrale faisant intervenir f.

c) On suppose que X_j suit la loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$, $f(x) = \mu\, e^{-\mu x}\mathbb{1}_{x\geq 0}$. Donner $\mathbb{E}(X_j)$. Calculer $\mathbb{P}(A_j = \ell)$ et $\mathbb{E}(A_j)$. À votre avis, quelle condition faut-il imposer aux paramètres pour que l'ordinateur fonctionne correctement ?

Exercice 2 *En chaîne sur un cercle*
On désigne par Λ un entier strictement supérieur à 2 et on note $\zeta = e^{2i\pi/\Lambda}$. On note par E l'ensemble des racines Λ-ièmes de l'unité $E := \{\zeta^j : j \in \{0, \ldots, \Lambda-1\}\}$. On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur E, de matrice de transition irréductible $P = (p(x,y))_{x,y\in E}$, telle que pour tout $x, y \in E$, $p(x,y) = p(\zeta x, \zeta y)$.

a) Justifier le fait que la chaîne admet une unique loi invariante $\mathtt{m}$.

b) Pour tout $x \in E$ on pose $\nu(x) = \mathtt{m}(\zeta x)$. Montrer que ν est aussi une loi invariante pour P. En déduire que $\mathtt{m}$ est la loi uniforme sur E.

c) On suppose que $X_0 = 1$ et soit $\tau_1 = \inf\{n \geq 1 : X_n = 1\}$. Calculer $\mathbb{E}_1(\tau_1)$.

d) On note $\mathbf{V}_\zeta^{[0,\tau_1[}$ le nombre de visites effectuées par la chaîne en ζ avant l'instant τ_1. Montrer que $\mathbb{E}_1(\mathbf{V}_\zeta^{[0,\tau_1[}) = 1$.

e) On considère une suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et telles que $\mathbb{P}(Z_1 = 1) > 0$. On note T le premier instant $n \geq 1$ tel que $Z_1 + \ldots + Z_n$ est un multiple entier de 13122018. En utilisant les questions précédentes montrer que $T < \infty$ p.s. et déterminer $\mathbb{E}(T)$.

Exercice 3 *Franchissement des hauteurs*
Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. intégrables, d'espérance $\gamma > 0$. On pose $S_0 = 0$ et pour $n \geq 1$ entier, $S_n = Z_1 + \ldots + Z_n$. On note, pour $b > 0$, $T = \inf\{n \geq 0 : S_n > b\}$.

a) On considère la suite $M_n = S_n - n\gamma$. Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_n^Z$-martingale. Montrer que si cette martingale est bornée dans L^1 alors les variables Z_n sont presque sûrement constantes.

b) Montrer que T est un temps d'arrêt. Quelle est la limite p.s. de $(S_n)_{n\geq 0}$? En déduire que T est p.s. fini.

Tournez S.V.P.

c) On suppose, uniquement dans cette question, qu'il existe $R \in]0,\infty[$ tel que $Z_n \leq R$ pour tout $n \geq 1$ presque sûrement. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\gamma\mathbb{E}(T \wedge n) \leq R + b$. En déduire que T est intégrable.

d) On revient au cas général où les variables Z_n sont quelconques. On définit, pour $R > 0$, les variables aléatoires tronquées $Z_n^{(R)} = Z_n \wedge R$. Montrer qu'il existe $R_1 \in]0,\infty[$ tel que $\mathbb{E}(Z_n^{(R_1)}) > 0$. En déduire que T est intégrable.

Exercice 4 *S'approcher (vite) des probabilités*
Soient π et $\mathtt{m}$ deux mesures de probabilité sur E un ensemble au plus dénombrable. On suppose que

$$\exists C \in]0,\infty[\text{ tel que } \pi(x) \geq \frac{\mathtt{m}(x)}{C} > 0, \ \forall x \in E.$$

Nous allons noter

$$\rho(x,y) := \min\Big(\frac{\pi(x)\mathtt{m}(y)}{\pi(y)\mathtt{m}(x)}, 1\Big), \ x,y \in E.$$

Soient deux suites indépendantes de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. à valeurs dans E de loi π et $(U_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. de loi $\mathcal{U}_{[0,1]}$. Soit enfin X_0 une variable aléatoire indépendante de ces deux suites. On pose, pour $n \geq 1$,

$$X_n = \begin{cases} Z_n & \text{si } U_n < \rho(X_{n-1}, Z_n), \\ X_{n-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition $P = (p(x,y))_{x,y\in E}$. Vérifier que la chaîne est irréductible et apériodique.

b) Montrer que $\mathtt{m}$ est une loi invariante pour la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$. Étudier le caractère récurrent ou transitoire de la chaîne.

c) On suppose, uniquement dans cette question, que $E = \mathbb{N}$ et que $\mathtt{m} = \mathcal{P}(\lambda)$ est la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ (les autres hypothèses restent en place). Calculer les limites suivantes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_k = 2\}}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-2iX_k} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} p^{(n)}(3,2).$$

d) On revient au cas général et soient μ et ν encore deux probabilités sur E. Montrer que

$$\|\mu P - \nu P\|_1 \leq \Big(1 - \frac{1}{C}\Big)\|\mu - \nu\|_1.$$

Rappel : $\|\mu - \nu\|_1 = \sum_{x\in E} \big|\mu(x) - \nu(x)\big|$. On pourra remarquer que $\sum_{x\in E}\big(\mu(x) - \nu(x)\big) = 0$ et on pourra montrer que $p(x,y) - \frac{\mathtt{m}(y)}{C} \geq 0$ pour tous $x, y \in E$.

e) En déduire que

$$\sup_{x\in E} \|p^{(n)}(x,\cdot) - \mathtt{m}\|_1 \leq \Big(1 - \frac{1}{C}\Big)^n \big(1 - \inf_{x\in E} \mathtt{m}(x)\big).$$