Contrôle continu # 3

le 14 décembre 2017 ; durée 2h30 ; trois feuilles résumés autorisées

Exercice 1 *Parties entière et fractionnaire d'une variable aléatoire exponentielle*
Pour $t > 0$, on note $\lfloor t \rfloor$ la partie entière et $\{t\}$ la partie fractionnaire de t :

$$\lfloor t \rfloor \in \mathbb{N}, \ \ \lfloor t \rfloor \leq t < \lfloor t \rfloor + 1, \ \text{ et } \ \{t\} = t - \lfloor t \rfloor \in [0,1[.$$

Soit T une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1, c'est-à-dire que T admet la densité $t \mapsto e^{-t}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$. On note $S := \lfloor T \rfloor$ et $V := \{T\}$, de sorte que $T = S + V$.

1. En calculant $\mathbb{P}(S = \ell, \ V \in [u,v])$ pour $\ell \in \mathbb{N}$ et $u, v \in [0,1[$, déterminer la loi du couple (S,V). Les variables S et V sont-elles indépendantes ?
2. Déterminer, avec un minimum de calculs, les espérances conditionnelles suivantes :

$$\mathbb{E}(S|V), \ \ \mathbb{E}(V|S), \ \ \mathbb{E}(S|T), \ \ \mathbb{E}(V|T), \ \ \mathbb{E}(T|S), \ \ \mathbb{E}(T|V).$$

Exercice 2 *Transitions poissoniennes*
On considère $P = (p(x,y))_{x,y\in\mathbb{N}}$ une matrice (infinie) donnée par

$$p(0,0) = 1, \, p(0,y) = 0, \ y \in \mathbb{N}^* \quad \text{ et } \quad p(x,y) = e^{-x}\frac{x^y}{y!}, \ x \in \mathbb{N}^*, \, y \in \mathbb{N},$$

1. Montrer que P est une matrice stochastique.
2. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ ayant la matrice de transition P. Classifier les états de cette chaîne.
3. Montrer que la fonction identité sur $\mathbb{N}$, $f(x) = x$, est une fonction harmonique pour P.
4. Fournir une démonstration du fait que, pour tout $x \in \mathbb{N}$, la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est une $\mathbb{P}_x$-martingale. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{N}$, la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge $\mathbb{P}_x$-p.s. vers 0.

Exercice 3 *Martingale multiplicative : régularité*
Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives indépendants d'espérance 1. On note $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et, pour $n \geq 1$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_k : k \leq n)$. On pose $X_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$, $X_n = Y_1 \ldots Y_n$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale et déduire que $(\sqrt{X_n})_{n\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_n$-surmartingale.
2. On suppose que $\prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(\sqrt{Y_k}) = 0$. Étudier la convergence et la limite de $(\sqrt{X_n})_{n\geq 0}$ puis de $(X_n)_{n\geq 0}$. La martingale $(X_n)_{n\geq 0}$ est-elle régulière ?
3. On suppose que $\prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(\sqrt{Y_k}) > 0$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=n}^{\infty} \mathbb{E}(\sqrt{Y_k}) = 1$.

   Pour $n \geq m$, calculer $\mathbb{E}(\sqrt{X_n X_m})$ et ensuite montrer que $(\sqrt{X_n})_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans L^2. Déduire que la martingale $(X_n)_{n\geq 0}$ est régulière.

Tournez S.V.P.

Exercice 4 *Comment voyager avec des saumons (à contre-courant)*
Soit $(q(x) : x \in \mathbb{N})$ une probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que $q(x) > 0$ pour tout $x > 0$. On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{N}$ de matrice de transition P telle que

$$p(0,y) = q(y),\ y \geq 0, \qquad \text{et lorsque } x \geq 1, \quad p(x,y) = \begin{cases} 1/x & \text{si } y < x, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Décrire avec vos mots une situation concrète modélisée par cette chaîne (5 lignes maximum).
2. Tracer le graphe de cette chaîne de Markov. Montrer que la chaîne est irréductible récurrente.
3. Soit $\mathtt{m}$ une mesure stationnaire pour cette chaîne. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{N}$,

   $$\mathtt{m}(x) = q(x)\mathtt{m}(0) + r(x), \qquad \text{où} \qquad \mathtt{r}(x) := \sum_{y>x} \frac{\mathtt{m}(y)}{y},$$

   et que la série $\displaystyle\sum_{y>0} \frac{\mathtt{m}(y)}{y}$ est convergente.
4. On pose $Q(x) := \sum_{y>x} q(y)$. Q est-elle bien définie ? Montrer que, pour tout $x > 0$,

   $$x\, r(x-1) = \mathtt{m}(x) + x\, r(x) \qquad \text{et encore} \quad x\, r(x-1) = q(x)\mathtt{m}(0) + (x+1)r(x),$$

   où r est la quantité introduite au point précédent.
   En déduire que $(x+1)r(x) = \mathtt{m}(0)Q(x)$ et que, pour tout $x > 0$,

   $$\mathtt{m}(x) = \mathtt{m}(0)\, x \Big(\frac{Q(x-1)}{x} - \frac{Q(x)}{x+1} \Big).$$
5. On considère maintenant $q(0) = 0$ et $q(x) = 1/x - 1/(x+1)$, $x \geq 1$.
   q est-elle une probabilité sur $\mathbb{N}$? La chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ est-elle récurrente positive ?
   On pourra calculer l'expression de $\mathtt{m}$ et sa masse totale.
   Déduire la valeur de la limite

   $$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{1}_{\{X_n=0\}}\,.$$