Université de Rennes 1 | Année 2016-2017
Master 1 Mathématiques | Chaînes de Markov et martingales

# Contrôle continu # 3

le 15 décembre 2016, durée 2h30, fiche résumé autorisée à l'exclusion de tout autre document

**Exercice 1** *(Calcul d'espérance conditionnelle : normal et discret)*

a) Soit ${}^t(X, Y, Z)$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\Gamma := \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $\mathbb{E}[X^3 \mid X^2]$, $\mathbb{E}[Y \mid Z]$, $\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y \mid Z])^2]$ et calculer $\mathbb{E}[X \mid (Y, Z)]$.

b) Soient $N > 2$ un entier et $(X, Y)$ un couple aléatoire à valeurs dans un "triangle" discret à $N(N+1)/2$ points, de loi

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{2}{N(N+1)} \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq j \leq N.$$

Trouver les lois marginales de $X$ et $Y$ et les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}(X = i|Y = j)$ et $\mathbb{P}(Y = j|X = i)$. Calculer $\mathbb{E}[X|Y]$ et $\mathbb{E}[Y|X]$ et déduire les valeurs de $\mathbb{E}[X]$ et $[Y]$.

**Exercice 2** *(Décomposer une martingale)*

Soit l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ et soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une $\mathcal{F}_n$-martingale bornée dans $\mathrm{L}^1$ (c'est-à-dire $\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$).

a) On note $Z_{n,m} := \max\{X_{n+m}, 0\}$ pour tous $n, m \geq 0$ entiers. Si on fixe $n \geq 0$, montrer que $(Z_{n,m})_{m\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_{n+m}$-sousmartingale bornée dans $\mathrm{L}^1$.

b) Montrer que $\mathbb{E}(Z_{n,m+1} \mid \mathcal{F}_n) \geq \mathbb{E}(Z_{n,m} \mid \mathcal{F}_n)$, pour tous $n, m \geq 0$. En déduire que les limites $M_n = \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}(Z_{n,m} \mid \mathcal{F}_n)$ existent p.s. pour tout $n \geq 0$.

c) Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale positive et bornée dans $\mathrm{L}^1$.

d) Montrer que $X_n = M_n - Y_n$, pour tout $n \geq 0$, où $(Y_n)$ est une martingale positive et bornée dans $\mathrm{L}^1$. De quelle décomposition s'agit-il ?

**Exercice 3** *(Les martingales en littérature : rocambolesque !)*

Un perroquet sait appuyer au hasard les touches d'un clavier (Qwerty) d'un ordinateur comportant que des lettres. La suite des lettres obtenue durant sa (longue) vie s'enregistre et on s'intéresse à la production littéraire de ce perroquet... Soit $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi uniforme sur l'alphabet de 26 lettres $\mathscr{A} = \{A, B, \ldots, Z\}$. La composition du perroquet est une chaîne de lettres lorsqu'on on écrit les termes de la suite $(\xi_n)$ à la suite, sans séparation. On étudie les premières apparitions de certains mots.

a) On note $T_{RO} := \inf\{n \geq 2 : \xi_{n-1} = R, \xi_n = O\}$ le premier instant où l'on voit le mot "$RO$" dans la chaîne $\xi_1 \ldots \xi_n \ldots$ et on souhaite trouver la valeur de $\mathbb{E}(T_{RO})$. On introduit la filtration $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $n \geq 1$. Justifier que $T_{RO}$ est un temps d'arrêt.

b) Montrer que pour tout $n \geq 3$

$$\mathbb{P}(T_{RO} > n) \leq \Big[\mathbb{P}\big(\xi_{2k-1}\xi_{2k} \neq RO,\ \forall k \in \{1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor\}\big)\Big]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \Big[\mathbb{P}\big(\xi_{2k}\xi_{2k+1} \neq RO,\ \forall k \in \{1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor - 1\}\big)\Big]^{\frac{1}{2}} = \Big(1 - \frac{1}{26^2}\Big)^{\frac{1}{2}(2\lfloor n/2 \rfloor - 1)}.$$

c) Montrer qu'il existe une constante $0 < \rho < 1$ telle que $\mathbb{P}(T_{RO} > n) \leq \rho^n$ pour tout $n \geq 3$. En déduire que $T_{RO} < \infty$ p.s. et que $T_{RO} \in \mathrm{L}^1$.

**Tourner S.V.P.**

d) Pour $n \geq 1$ on note $X_n := \sum_{k=2}^{n} 26^2 \mathbb{1}_{\{\xi_{k-1}=R, \xi_k=O\}} + 26\mathbb{1}_{\{\xi_n=R\}}$ et $M_n := X_n - n$. Montrer que $(M_n)_{n\geq 1}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale.

e) Montrer que $(M_{n\wedge T_{RO}})_{n\geq 1}$ est une martingale qui converge p.s. et dans $\mathrm{L}^1$ vers $M_{T_{RO}}$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(T_{RO})$.

f) Soit $T_{ROCAMBOLESQUE} := \inf\{n \geq 13 : \xi_{n-12}\xi_{n-11}\ldots\xi_n = ROCAMBOLESQUE\}$ le premier instant où le perroquet compose le mot "$ROCAMBOLESQUE$". On admet que c'est un temps d'arrêt fini p.s. et intégrable. Quelle martingale $(\widetilde{M_n})$ remplace $(M_n)$ ? Continuer le raisonnement et trouver la valeur de $\mathbb{E}(T_{ROCAMBOLESQUE})$.

**Exercice 4** *(Chantons sous la pluie)*
Kathy possède $r \geq 1$ parapluies qu'elle garde soit chez elle, au centre ville de Rennes, soit à son bureau de Beaulieu. Le matin avant d'aller au campus elle regarde le temps qu'il fait par la fenêtre : s'il ne pleut pas elle ne prend pas de parapluie, s'il pleut et qu'il y a un parapluie à la maison elle part travailler au bureau et, enfin s'il pleut et qu'il n'y a plus de parapluie à la maison elle reste chez elle. Le soir, en partant du bureau, Kathy procède de la même façon, sauf que s'il pleut et qu'elle n'a plus de parapluie au bureau alors elle rentre quand même chez elle. On suppose que les météos des demi-journées sont indépendantes et que pour chaque demi-journée il pleut avec probabilité $p \in ]0,1[$ (et il ne pleut pas avec probabilité $1-p$).

a) On note $X_n$ le nombre de parapluies que Kathy a chez elle le soir du $n$-ième jour. Donner une justification du fait qu'on peut modéliser l'évolution de $X_n$ par une chaîne de Markov et trouver sa matrice de transition.

b) Étudier la chaîne de Markov $(X_n)$ : la classification des états, leur caractère récurrent ou transitoire, la périodicité.

c) Existe-t-il une mesure stationnaire ? réversible ? Unicité ? Si oui peut-on le(s) trouver ?

d) Calculer $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\text{Kathy reste chez elle le jour } n)$. Justifier ce calcul.

e) À Rennes il pleut 115 jours par an, en moyenne (autrement dit $p \approx 0,1725$ ; expliquer comment trouve-t-on cette valeur). Kathy souhaite ne rater qu'une journée de travail au bureau par semaine, en moyenne. Combien de parapluies doit-elle posséder pour cela ? Même question si Kathy souhaite ne rater qu'une journée par mois, en moyenne.

f) On note $T_N$ le nombre de jours jusqu'à l'instant $N$ où Kathy a été mouillée. Que dire de la convergence de $\frac{T_N}{N}$ quand $N \to \infty$ ?