

## Probabilités de base : contrôle continu no. 2

mardi 13 novembre 2007 - durée 1 heure

calculatrice interdite - documents (cours manuscrit ou imprimé) autorisés

### Exercice I.

Soient  $X_1, X_2, X_3, X_4$  quatre variables aléatoires indépendantes de même loi gaussienne standard  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

- Montrer que  $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}} \sim X_1 \sim X_2$  (même loi). Quelle est la loi de  $\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{2}$  ?  
On pourra d'abord rappeler l'expression de la fonction caractéristique  $\varphi$  de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .
- Déterminer la fonction caractéristique  $\psi$  de la variable aléatoire produit  $X_1X_4$ .  
On pourra d'abord montrer que  $\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(ty)f(y)dy$ , où  $f$  est la densité de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .
- Trouver la fonction caractéristique de la variable aléatoire  $D = \det \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$  et ensuite sa loi.
- En déduire la loi de la variable aléatoire  $|D|$  par la méthode de votre choix (fonction caractéristique ou fonction de répartition).

### Exercice II.

Soient  $\varepsilon, \varepsilon', X$  et  $X'$  quatre variables aléatoires indépendantes. On suppose que  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  ont la même loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(1, 1/2)$  et que  $X$  et  $X'$  ont la même loi d'espérance  $m$  et de variance  $\sigma^2$ . On note  $Z = \varepsilon X + \varepsilon' X'$ .

- Calculer  $E(Z)$ ,  $E(Z^2)$  et ensuite  $\text{Var}(Z)$ .
- Dans la suite de l'exercice on suppose que la loi commune de  $X$  et  $X'$  est la loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ . Donner les valeurs de  $E(Z)$  et  $\text{Var}(Z)$  dans ce cas.
- On note  $A_{0,0} = \{\varepsilon = 0, \varepsilon' = 0\}$  et  $A_{1,0} = \{\varepsilon = 1, \varepsilon' = 0\}$ .  
Calculer  $P(\{Z = n\} \cap A_{0,0})$  et  $P(\{Z = n\} \cap A_{1,0})$ , pour  $n \geq 0$  entier.
- Déterminer la loi de  $Z$  en utilisant les résultats du point précédent.