UFR Mathématiques
Université de Rennes 1

Master 1ère année
Année 2008/2009

Probabilités de base : contrôle continu no. 2

lundi 24 novembre 2008 - durée 1 heure - résumé autorisé

Exercice I. Soient X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires réelles indépendantes de même loi gaussienne $\mathcal{N}(m, 1)$. Calculer la fonction caractéristique du couple $(X_1 + X_2, X_1 + X_3)$. S'agit-il d'un couple gaussien ? admet-il une densité ?

Exercice II. Supposons que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes ayant la même loi de Bernoulli d'espérance $1/2$. Les variables aléatoires $X + Y$ et $|X - Y|$ sont-elles non-corrélées ? indépendantes ?

Exercice III. Soit $(A_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'évènements dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. Montrer que l'existence d'un évènement A tel que $\sum_{n \geqslant 1} \mathrm{P}(A \cap A_n) < \infty$ implique l'inégalité $\mathrm{P}(\limsup_n A_n) \leqslant 1 - \mathrm{P}(A)$.

Exercice IV. Soient λ et σ^2 deux réels positifs et $a \in \mathbb{R}$. Considérons les variables aléatoires indépendantes $G \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Que vaut la fonction caractéristique de la variable aléatoire $\sqrt{T}G + aT$?

Exercice V. Sur le segment $[0, 1]$ on choisit indépendamment et au hasard deux points suivant la loi uniforme. Ces deux points divisent le segment $[0, 1]$ en trois parties presque sûrement. Trouver la loi de la longueur de chaque partie. Que peut-on remarquer ?