UFR Mathématiques | Licence 3ème année
Université de Rennes 1 | Année 2007/2008

Espaces vectoriels normés : contrôle continu no. 2

vendredi 21 mars 2008 - durée 1 heure - résumé autorisé

Exercice I.

Pour $(u_j)_{j\geqslant 1} \in \ell_\infty$ on pose $T((u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots)) := ({}^{u_1}/_2, {}^{(u_1+u_2)}/_{2^2}, {}^{(u_1+u_2+u_3)}/_{2^3}, \ldots)$. Montrer que $T : \ell_\infty \to \ell_1$, que T est un opérateur linéaire borné et calculer sa norme $\|T\|$.

Exercice II.

Soit l'espace vectoriel réel $E = \mathrm{L}^2([0,1])$ et on note

$$M := \left\{ x \in \mathrm{L}^2([0,1]) : \int_0^1 x(t)dt = \int_0^1 tx(t)dt = \int_0^1 t^2x(t)dt = 0 \right\}.$$

Montrer que M est l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de E que l'on précisera. Étant donné un vecteur $x \in E$ on veut trouver l'expression du vecteur m de M le plus proche de x (pour la distance de E). Justifier que x se décompose de manière unique $x = m + y$, avec $y \in F$. Construire un système orthonormal complet $\{e_j\}$ de l'espace F. Enfin, montrer que $m = x - \sum_j (x, e_j)e_j$ et calculer explicitement m. Application : $x(t) = t^3$, $t \in [0,1]$.

Exercice III.

Expliquer pourquoi le théorème de Hahn-Banach devient trivial pour tout sous-espace vectoriel fermé M d'un espace de Hilbert E. Montrer que pour tout vecteur x de l'espace de Hilbert E on a $\|x\| = \sup\limits_{f\in E^\star\setminus\{0\}} \dfrac{|f(x)|}{\|f\|}$, sans utiliser le théorème de Hahn-Banach.

Exercice IV.

Soit E un espace de Banach et soient $T_1, T_2, T_3, \ldots$ et $S_1, S_2, S_3, \ldots$ opérateurs linéaires bornés définis sur E à valeurs dans E tels que $T_nS_m = S_mT_n$ pour tous les entiers $n, m \geqslant 1$. On suppose que, pour tout $x \in E$, $\lim_{n\to\infty} T_nx = Tx$ et $\lim_{n\to\infty} S_nx = Sx$. Montrer que $S, T \in B(E,E)$ et que $TS = ST$.