Université de Rennes 1
Licence de Mathématiques

Année 2020-2021
L2 CMR et L3 SSF

# Contrôle continu # 2

**le 15 mars 2021 ; durée 1 heure**

*Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction dans l'évaluation. Bon travail !*

**Exercice 1** *Questions de cours ou presque*
Les trois questions suivantes sont indépendantes.

1. Soient $N_1$ et $N_2$ deux normes sur un e.v. $E$. Montrer que $N_1$ et $N_2$ sont équivalentes si et seulement si les applications $\mathtt{id} : (E, N_1) \to (E, N_2)$ et $\mathtt{id} : (E, N_2) \to (E, N_1)$ sont continues.
2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n et on munit l'espace vectoriel produit $E \times E$ de la norme $N\big((x, y)\big) = \|x\| + \|y\|$. Montrer que l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$, $d(x, y) = \|x - y\|$ est une application $1-$lipschitzienne.
3. La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la limite uniforme d'une suite de fonctions bornées $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   $g$ est-elle bornée ? Si oui fournir une démonstration si non donner un contrexemple.
   Qu'en est-il lorsque $g$ est seulement la limite simple de le suite $g_n$ ? Encore une fois, si oui fournir une démonstration si non donner un contrexemple.

**Exercice 2** *Continuité de deux applications*
On munit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de la norme $\|\cdot\|$ définie par $\|P\| = \sup\limits_{k\geq 0} |a_k|$ si $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ (on admet que c'est bien une norme sur $\mathbb{R}[X]$).

Étudier la linéarité et la continuité des applications définies sur $\mathbb{R}[X]$ comme suit

$$\varphi : P \mapsto P' \quad \text{et} \quad \psi : P \mapsto XP.$$

En cas de continuité, peut-on réaliser le cas d'égalité dans les inégalités donnant leur continuité ?

**Exercice 3** *Suite de fonctions*
Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(t) = \dfrac{2^n t}{1 + n2^n t^2}$.

Étudier ensuite la convergence uniforme de la suite sur $\mathbb{R}$ et sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$ avec $a > 0$.

**Exercice 4** *Série de fonctions*
Étudier la série de fonctions $\sum_{n=2}^{\infty} f_n$, avec $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f_n(t) = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{t}{(2+t)\, n \ln n}\right)$, $n \geq 2$, en montrant que cette série

a) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ ;
b) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ ;
c) ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Rappel : $\frac{u}{1+u} \leq \ln(1+u) \leq u$ pour $u > -1$.