Université de Rennes 1 | Année 2019-2020
Licence de Mathématiques | L2 CMR et L3 SSF

Contrôle continu #2

le 9 mars 2020 ; durée 1 heure ; documents, calculatrices et téléphones interdits
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction dans l'évaluation. Bon travail !

Exercice 1 *(étude de suites de fonctions)*
Les trois parties sont indépendantes.

1. Soit $h_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $h_n(t) = \dfrac{ne^{-t} + t^2}{n+t}$. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite (h_n).
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ soit $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(t) = n^2 t(1-nt)$, $t \in [0, \frac{1}{n}]$ et $g_n(t) = 0$ sinon.
   (a) Étudier la limite simple de la suite (g_n).
   (b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 g_n(t)dt$. Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction (g_n) ?
   (c) Étudier la convergence uniforme sur $[a,1]$ avec $a \in]0,1[$.
3. Soit (f_n) une suite de fonctions telle que pour tout n, $f_n : I \to \mathbb{R}$ est une fonction uniformément continue sur I. On suppose que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction f. Montrer que f est uniformément continue sur I.

Exercice 2 *(étude de séries de fonctions)*
Les deux parties sont indépendantes.

1. Étudier la convergence simple, uniforme et normale (dans cette ordre) de la série de fonctions $\sum u_n$, avec $u_n(t) = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)(t+1)}$, $t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$.
2. Étudier la convergence (simple, uniforme, normale) de la série de fonctions $\sum v_n$ avec $v_n(t) = e^{-n}\sin(n^2 t)$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. On pourra commencer par étudier la convergence normale. Montrer ensuite que sa somme est dérivable.

Exercice 3 *(question de cours)*
Énoncer et démontrer un résultat d'équivalence pour la continuité (en 0) et le caractère lipschitzien (en 0) d'une application linéaire continue entre deux espaces vectoriels normés $\ell : E \to F$.