Université de Rennes 1 Année 2018-2019
Licence de Mathématiques L2 CMR et L3 SSF

Contrôle continu # 2

le 21 mars 2019 ; durée 1 heure ; documents, calculatrices et téléphones interdits

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction dans l'évaluation. Bon travail !

Exercice 1 *Vrai ou faux*

Que pensez-vous de chacun des énoncés suivants ? Fournir une démonstration si vous pensez que c'est vrai, sinon démontrer le contraire ou donner un contre-exemple.

1) Antoine dit : la suite de fonctions $u_n : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $u_n(t) = \ln\left(t + \frac{1}{n}\right)$ converge uniformément.
2) Bernard dit : la suite de fonctions $v_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $v_n(t) = nt^n(1-t)$ converge uniformément, mais pas sur $[0,1]$ entier.
3) Cyril dit : la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f_n(t) = \frac{n^3 t}{n^4 + t^4}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
4) David dit : la suite de fonctions $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g_n(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n}}$ est uniformément convergente. Didier ajoute : la fonction limite g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
5) Emile dit : la limite simple f d'une suite de fonctions f_n toutes croissantes est une fonction croissante. Etienne réplique : f est même strictement croissante si toutes les f_n le sont !
6) Fabien dit : la limite uniforme g d'une suite de fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$, g_n, toutes bornées, est une fonction bornée.

Bonus Grégoire dit : si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 avec sa dérivée h'' bornée alors la suite de fonctions $h_n(t) = n\big(h(t + \dfrac{1}{n}) - h(t)\big)$ converge uniformément vers h'.

Exercice 2 *Dérivabilité et décroissance*

Montrer que la fonction S qui à t associe $S(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+t)}$ est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer sa dérivée et déduire que S est décroissante.

- Bonus A : Calculer $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} S(t)$.
- Bonus B : Montrer que pour tout $t \in]0, +\infty[$, $tS(t) - S(1+t) = e^{-1}$.