Université de Rennes 1 — Année 2017-2018
Licence 2ème Mathématiques — Compléments Math Recherche

Contrôle continu # 2

le 20 mars 2018 ; durée 1h10 ; documents, calculatrices et téléphones interdits
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction dans l'évaluation. Bon travail !

Exercice 1 *Questions de cours (ou presque)*
Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1) Soient $U \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $a \in U$, $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction, et $(e_1, \dots, e_d)$ une base de $\mathbb{R}^d$.
   a) Donner la définition des dérivées partielles de f au point a.
   b) Supposons que f est différentiable en a. Montrer que les dérivées partielles de f en a existent et les exprimer à l'aide de df(a). Écrire ensuite la différentielle df(a) en fonction des dérivées partielles de f en a.
   c) Supposons encore que f est différentiable en a. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que a soit un point critique pour f.

   Bonus : Donner la démonstration de cette dernière condition nécessaire et suffisante.
2) Soient f et $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ des fonctions réelles, toutes définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ non réduit à un point, telles que pour tout $t \in I$, $|f_n(t) - f(t)| \leq \alpha_n$ où (α_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge et préciser dans quel sens.
   Application : étudier la suite de fonctions $f_n(t) = t + \frac{1}{n}$, $t \in \mathbb{R}_+$ et $n \geq 1$.
   Bonus : Montrer que la suite de fonctions de l'application ci-dessus satisfait, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\lim_{n\to\infty} f_n^2(t) = t^2$, mais que (f_n^2) ne converge pas uniformément.

Exercice 2 *Dérivées partielles et différentiabilité*
Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1) Calculer les dérivées partielles de premier et second ordre de la fonction $f(x, y) = e^{xy}(x+y)$. f est-elle différentiable et si oui que vaut sa différentielle ?
2) On munit $E := \mathbb{R}_n[X]$ de la norme $\|P\| = \sup_{0\leq t\leq 1} |P(t)|$. Démontrer que l'application $\phi : E \to \mathbb{R}$, $P \mapsto \int_0^1 P(t)^3 \, dt$ est différentiable sur E et exprimer sa différentielle.

Exercice 3 *Dérivée composée et fonction homogène*
Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. f est dite homogène de degré $p \in \mathbb{N}^*$ si elle vérifie

$$(\star) \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t > 0, \quad f(tx, ty) = t^p f(x, y).$$

a) Montrer que les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sont elles aussi homogènes et préciser leur degré.
b) En dérivant la relation $(\star)$, montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = pf(x, y).$

   Bonus : Montrer que si la relation de b) est satisfaite, alors f est homogène de degré p. On pourra poser $\varphi(t) = f(tx, ty)$ et montrer que $t^{-p}\varphi(t)$ est constante sur $\mathbb{R}_+$.