Université de Rennes 1 — Année 2021-2022
Master 1 Mathématiques — Analyse Fonctionnelle

Contrôle continu # 2

le 17 novembre 2021 ; durée 1h15 ; deux feuilles résumés autorisées

Exercice 1 *Questions de cours (ou presque)*
Pour les questions suivantes (qui sont indépendantes) on suppose que E, F sont deux espaces de Banach.

a) Soit (x_n) une suite de E qui converge faiblement $\sigma(E, E')$ vers $x \in E$.
Montrer que la suite $\bar{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ est faiblement convergente et trouver sa limite.

b) i) Démontrer que l'opérateur linéaire $T : E \to F$ est $\|\cdot\|_E - \|\cdot\|_F$ continu (fort-fort) si et seulement si T est $\sigma(E, E') - \sigma(F, F')$ continu (faible-faible).

ii) Déduire que la forme linéaire $f : (E, \|\cdot\|) \to \mathbb{K}$ est continue ssi $f : (E, \sigma(E, E')) \to \mathbb{K}$ est continue.

iii) Soit $T \in B(E, F)$. Montrer que $T' : F' \to E'$ est $\sigma(F', F) - \sigma(E', E)$ continu (faible*-faible*).

Bonus : Soit $S : F' \to E'$ un opérateur linéaire tel que S est $\sigma(F', F) - \sigma(E', E)$ continu (faible*-faible*). Montrer qu'il existe $T \in B(E, F)$ tel que $T' = S$.

c) j) On suppose $T : E \to F$ est un opérateur linéaire compact. Montrer que si E est réflexif alors, il existe un $x \in E$, $\|x\| \leq 1$, tel que $\|T\| = \|Tx\|$.

jj) On suppose que $F \neq \{0\}$ et que pour tout opérateur compact $T : E \to F$ il existe un $x \in E$, $\|x\| \leq 1$ tel que $\|T\| = \|Tx\|$. Montrer que E est réflexif. On pourra considérer l'opérateur défini par $T_{f,y}(x) = f(x)y$ avec $f \in E'$ et $y \in F$ et utiliser la condition nécessaire et suffisante de réflexivité de James-Kakutani ($\forall f \in E'$, $\exists x \in E$, t.q. $\|x\| = 1$ et $|f(x)| = \|f\|$).

Exercice 2 *Espace ℓ^∞*
Soit l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N})$ muni de la norme uniforme. Trouver une suite (f_n) de $(\ell^\infty)'$ telle que $\|f_n\|_{(\ell^\infty)'} = 1$ et telle que (f_n) ne possède aucune sous-suite convergente pour la topologie faible. Y-a-t-il contradiction avec le fait que la boule unité fermée de $(\ell^\infty)'$ est faiblement* compacte ? Que pouvez-vous en conclure sur ℓ^∞ et $(\ell^\infty)'$?

Exercice 3 *Formes linéaires sur ℓ^1*

1. Soit $f : \ell^1 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(1 - 1/n)\xi_n$, $x = (\xi_n) \in \ell^1$. Montrer que $f \in (\ell^1)'$ et calculer sa norme. Est-ce que la valeur de $\|f\|$ est atteinte sur la boule unité fermée de ℓ^1 ?
2. Mêmes questions pour $g : \ell^1 \to \mathbb{R}$ donnée par $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(1/n)\xi_n$, $x = (\xi_n) \in \ell^1$.

Exercice 4 *Convergence faible dans L^p*

1. Soit $x_n(t) = ne^{-nt}$, $t \in (0, 1)$. Vérifier que la suite (x_n) tend vers 0 p.p. sur $(0, 1)$, qu'elle est bornée dans $\mathrm{L}^1(0, 1)$, mais qu'elle ne tend pas vers 0 ni fortement dans $\mathrm{L}^1(0, 1)$, ni faiblement $\sigma(\mathrm{L}^1, \mathrm{L}^\infty)$. Montrer aussi qu'il n'y a pas de sous-suite de (x_n) convergente faiblement $\sigma(\mathrm{L}^1, \mathrm{L}^\infty)$.
2. Soit $1 < p < \infty$ et soit $y_n(t) = n^{1/p}e^{-nt}$, $t \in (0, 1)$. Montrer que la suite (y_n) tend vers 0 p.p. sur $(0, 1)$, qu'elle est bornée dans $\mathrm{L}^p(0, 1)$, qu'elle ne tend pas vers 0 dans $\mathrm{L}^p(0, 1)$, mais qu'elle tend vers 0 fortement dans $\mathrm{L}^q(0, 1)$ pour tout $q \in [1, p)$ et elle tend vers 0 faiblement $\sigma(\mathrm{L}^p, (\mathrm{L}^p)')$.