Contrôle continu # 2

le 17 novembre 2020 ; durée 1h45 ; deux feuilles résumés autorisées

Exercice 1 *Questions de cours (ou presque)*
Pour toutes les questions suivantes (qui sont indépendantes) on suppose que l'espace E est un espace de Banach sur $\mathbb{K}$ et que E est réflexif.

a) Une suite (x_n) de E est dite faiblement de Cauchy si pour chaque $f \in E'$ la suite $(\langle f, x_n \rangle)$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$. Montrer que toute suite faiblement de Cauchy de E est faiblement convergente (on dit que E est faiblement complet).

b) Montrer que toute forme linéaire continue $f \in E'$ atteint sa norme sur la boule unité fermée B_E.

c) Soit C un sous-ensemble convexe non-vide $C \subset E$. Montrer que $x \mapsto d(x, C)$ est continue et convexe et que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble $F_\lambda := \{x \in E : d(x, C) \leq \lambda\}$ est faiblement fermé.

d) Montrer que tout sous-ensemble convexe fermé non-vide $C \subset E$ contient un élément minimal, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in C$ tel que $\|x_0\| = d(0, C) = \inf_{x \in C} \|x\|$. On pourra étudier la suite des intersections de C avec les boules fermés $\overline{B\big(0, d + \frac{1}{n}\big)}$, où $d = d(0, C)$.

Exercice 2 *Forme linéaire sur* $\mathrm{C}([a, b])$
Soient $a < b$ deux réels fixés et on note $\mathrm{C}([a, b])$ l'espace des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[a, b]$ muni de la norme uniforme. On introduit

$$F = \left\{ x \in \mathrm{C}([a, b]) : \int_a^{(a+b)/2} x(t)dt = \int_{(a+b)/2}^b x(t)dt \right\}.$$

Montrer que F est un sous-espace linéaire fermé de $C([a, b])$ et trouver $f_0 \in \mathrm{C}([a, b])'$ telle que $F = \mathrm{Ker}(f_0)$. Montrer aussi que $\|f_0\| = b - a$.
Montrer ensuite que cette forme linéaire f_0 n'atteint pas sa norme sur la boule unité fermée de $C([a, b])$. On pourra considérer un x_0 de norme ≤ 1 et utiliser l'expression de f_0.
Déduire que $\mathrm{C}([a, b])$ n'est pas réflexif.

Exercice 3 *Convergence faible sur* c_0
Soient $x \in c_0$ et (x_n) une suite de c_0. Montrer que $x_n \to x$ faiblement dans c_0 si et seulement si $(\|x_n\|)$ est bornée et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} p_k(x_n) = p_k(x)$, où $p_k : c_0 \to \mathbb{K}$ sont les projections canoniques $p_k\big((a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots)\big) = a_k$. On rappelle que si $f \in c_0' = \ell^1(\mathbb{N})$ il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots) \in \ell^1(\mathbb{N})$ telle que $f\big((a_0, a_1, \ldots)\big) = \sum_{n \geq 0} \lambda_n a_n$, $\forall (a_0, a_1, \ldots) \in c_0$.
En déduire la convergence faible vers 0 de la suite donnée par

$$x_n = \Big(0, \ldots, 0, \psi\big(\frac{n}{n}\big), \psi\big(\frac{n+1}{n}\big), \ldots, \psi\big(\frac{n+n}{n}\big), 0, 0, \ldots\Big),\ n \in \mathbb{N},$$

où $\psi : [1, 2] \to \mathbb{K}$ une fonction continue et $\psi\big(\frac{n}{n}\big)$ est sur la place n.
<u>Bonus</u> : Montrer que x_n tend fortement vers 0 si et seulement si $\psi \equiv 0$. On pourra montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t \in [1, 2]$, $\left|\psi\big(\frac{[nt]}{n}\big)\right| < \varepsilon$ pour n à partir d'un certain rang (ici $[\cdot]$ note la partie entière).