Université de Rennes 1 | Année 2018-2019
Master 1 Mathématiques et Applications | Chaînes de Markov et martingales

Contrôle continu # 2

le 30 novembre 2018 ; durée 1h ; deux feuilles résumé autorisées

Exercice 1 *Doob "rencontre" Dirichlet ou la h-transformée d'une chaîne de Markov*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice P sur un espace d'états E au plus dénombrable.

a) Soit $C \subset E$ et on rappelle que σ_C note le temps d'atteinte de C. Soit $f : C \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable et on note $g(x) := \mathbb{E}_x\big[f(X_{\sigma_C})\mathbb{1}_{\{\sigma_C<\infty\}}\big]$. Montrer que $g = f$ sur C et $Pg(x) = g(x)$ pour tout $x \in E \setminus C$.

b) Soit encore une fois $C \subset E$ et on suppose que $p(x, x) = 1$ pour tout $x \in C$ (on autorise aussi que $C = \emptyset$). Soit h une fonction mesurable positive, harmonique sur $E \setminus C$. On pose $(E \setminus C)_+ = \{x \in E \setminus C : h(x) > 0\}$ et on définit la matrice $P_h = (p_h(x, y))_{x,y\in(E\setminus C)_+}$, avec

$$p_h(x,y) := \frac{h(y)}{h(x)}p(x,y),\ x,y \in (E\setminus C)_+ \quad (P_h \textit{ est la h-transformée de } P).$$

Montrer que P_h est la matrice de transition d'une chaîne de Markov $(X_n^{(h)})_{n\geq 0}$ sur $(E \setminus C)_+$. Que vaut $p_h^{(n)}(x, y)$?

c) On suppose maintenant que E est fini et qu'il y a deux états absorbants a et b, et pas plus. On introduit $h(x) := \mathbb{P}_x(\sigma_b < \sigma_a)$ et on suppose que $h(x) > 0$ pour tout $x \neq a$. Vérifier que h est harmonique sur $E \setminus \{a, b\}$. En déduire que, lorsque $x \neq a$,

$$p_h(x,y) = \mathbb{P}_x\big(X_1 = y|\sigma_b < \sigma_a\big).$$

Comment faut-il comprendre la chaîne $(X_n^{(h)})$?

d) Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire sur $E = \{0, \dots, N\}$ telle que $p(x, x - 1) = p(x, x + 1) = 1/2$, $x \in [\![1, N - 1]\!]$, $p(0, 0) = p(0, 1) = 1/2$, $p(N, N) = p(N, N - 1) = 1/2$. Montrer qu'une marche aléatoire conditionnée d'atteindre N avant d'atteindre 0 (et stoppée en σ_N) est une chaîne de Markov et trouver sa matrice de transition.
On pourra commencer par démontrer que $\mathbb{P}_x(\sigma_N < \sigma_0) = \frac{x}{N}$, lorsque $x \in [\![0, N]\!]$.

Exercice 2 *Classification, absorption, invariance*
On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $E = \{1, 2, \dots, 6\}$ et de matrice de transition

$$P := \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Établir la classification des états de la chaîne : quels sont les états absorbants, transitoires, récurrents, et les classes de récurrence.

b) Calculer les probabilités d'absorption dans les classes de récurrence.

c) Pour chaque état transitoire $x \in E$, calculer le temps moyen d'absorption dans l'état absorbant pour la chaîne issue de x, sachant que celui-ci est fini.

d) Déterminer les probabilités invariantes de la chaîne.