Contrôle continu # 2

le 23 novembre 2017 ; durée 75 minutes ; deux feuilles résumés autorisées

Exercice 1 *Questions de cours (ou presque)*

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans E de matrice de transition $P=(p(x,y))_{x,y\in E}$.

a) On pose $\widetilde{X}_n=(X_n,X_{n+1})$. Montrer que $(\widetilde{X}_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition donnée par
$$\widetilde{p}((x,y),(v,w))=\begin{cases} p(y,w) & \text{si } y=v \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$
En déduire que, si m est une mesure stationnaire pour (X_n), alors $\widetilde{m}(x,y)=m(x)p(x,y)$ est une mesure stationnaire pour $(\widetilde{X}_n)$ sur l'espace d'états $\widetilde{F}=\{(x,y)\in E\times E : p(x,y)>0\}$.

b) On suppose dans cette partie que E est un ensemble fini et que la chaîne (X_n) est irréductible. Existe-t-il une probabilité stationnaire pour (X_n) ? Soit $f: E\to\mathbb{R}$, on note $\ell=\min_{z\in E} f(z)$ et soit $x\in E$ un état où $f(x)=\ell$ (pourquoi existe un tel x ?)

(a) On suppose que f est harmonique pour P (c'est-à-dire que $f=Pf$) et qu'il existe un $y\in E$ tel que $f(y)>\ell$. Peut-on trouver un entier $n>0$ tel que $p^{(n)}(x,y)>0$? Justifier soigneusement les relations suivantes
$$f(x)=\textstyle\sum_{z\in E} p^{(n)}(x,z)f(z)>\ell\, p^{(n)}(x,y)+\ell\sum_{z\neq y} p^{(n)}(x,z)=f(x).$$
En déduire que la fonction harmonique f est constante.

(b) Quelle est la dimension du noyau de la matrice $P-I$? de la matrice P^t-I ? En remarquant qu'une probabilité stationnaire est vecteur propre à droite pour P^t, déduire l'unicité d'une probabilité stationnaire pour (X_n), lorsque E est fini et irréductible.

Exercice 2 *Convergence des séries aléatoires*

Soient $(\sigma_n^2)_{n\geq 1}$ une suite de nombres positifs et $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles de carré intégrable, définies sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. On note $\mathcal{F}_0=\{\emptyset,\Omega\}$ et pour $n\geq 1$, $\mathcal{F}_n=\sigma(\xi_1,\dots,\xi_n)$. On suppose que pour tout $n\geq 1$,
$$\mathbb{E}(\xi_n|\mathcal{F}_{n-1})=0 \text{ p.s. et } \mathbb{E}(\xi_n^2|\mathcal{F}_{n-1})=\sigma_n^2 \text{ p.s.}$$
On pose $M_0=0$, $A_0=0$ et pour $n\geq 1$, $M_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$ et $A_n=\sigma_1^2+\ldots+\sigma_n^2$.

a) Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale de carré intégrable de compensateur $\langle M\rangle_n=A_n$.

b) Montrer que si $\sum_{k\geq 1}\sigma_k^2<\infty$ alors $\sum_{k\geq 1}\xi_k$ converge presque sûrement et dans L^2.

c) On suppose cette fois-ci que $\sum_{k\geq 1}\xi_k$ converge presque sûrement et qu'il existe une constante R telle que pour tout $k\geq 1$, $|\xi_k|\leq R$ p.s. On note, pour $a>0$, $T_a=\inf\{n\geq 0 : |M_n|>a\}$.

(i) Montrer que pour tout n, $\mathbb{E}\Big(M_{n\wedge T_a}^2\Big)=\mathbb{E}\big(A_{n\wedge T_a}\big)$.

(ii) Montrer qu'il existe $a>0$ tel que $\mathbb{P}(T_a=+\infty)>0$.
On pourra justifier que (M_n) est bornée p.s. et qu'alors $\Omega=\lim_k\uparrow\{T_k=+\infty\}$ p.s.

(iii) Montrer que si a est choisi comme ci-dessus on a pour tout n, $\big|M_{n\wedge T_a}\big|\leq a+R$ p.s.
En utilisant (i) déduire que $\sum_{k\geq 1}\sigma_k^2<\infty$.

Tournez S.V.P.

d) On suppose maintenant que les variables aléatoires réelles $(\xi_n)_{n\geq 1}$ sont de carré intégrable, centrées et indépendantes. Pouvez-vous énoncer des liens entre la convergence de la série $\sum_{k\geq 1} \mathrm{Var}(\xi_k)$ et la convergence presque sûre de la série $\sum_{k\geq 1} \xi_k$ (et sous quelles conditions) ?

Exercice 3 *Classification et probabilités d'absorption*

On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ dont le graphe est représenté ci-dessous. On suppose que sa loi initiale est $\mu_0 = (0, 0, 0, 1, 0)$.

a) Donner la matrice de transition P de la chaîne. Effectuer la classification des états (récurrents, transitoires, ...)

b) Justifier l'existence des probabilités stationnaires. Unicité ? Déterminer les ou la probabilité(s) stationnaire(s).

c) Calculer les probabilités d'absorption dans les classes de récurrence.

Bonus : calculer le temps moyen d'absorption dans la classe récurrente ayant le plus grand cardinal, sachant que ce temps est fini.