Université de Rennes 1 — Année 2016-2017
Master 1 Mathématiques — Chaînes de Markov et martingales

Contrôle continu # 2

le 2 décembre 2016 ; durée 1 heure et 15 minutes ; aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 *Questions de cours (ou presque)*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à espace d'états E dénombrable, de matrice de transition P.

1. Donner les deux définitions de la fonction de Green G associée à la chaîne.
2. Soit ν une loi de probabilité initiale arbitraire. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}_\nu(X_n = y) \leq G(y,y)$, pour tout état $y \in E$. En déduire que si y est transitoire, alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\nu(X_n = y) = 0$, pour toute loi initiale ν.
3. Donner une démonstration complète de l'égalité $G(x,y) = \delta_{xy} + \displaystyle\sum_{z\in E} G(x,z)p(z,y)$, pour $x, y \in E$ (δ_{xy} est le symbole de Kronecker). Supposons E irréductible et transitoire. Pour chaque $x \in E$, la mesure $y \mapsto G(x,y)$ est-elle excessive ? invariante ? Justifier votre réponse.

Exercice 2 *Science-fiction génétique*
Pour comprendre le mécanisme des maladies comme le cancer on tente des manipulations génétiques qui permettent de passer d'une base azotée à une autre : ces transitions sont modélisées par une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à espace d'états les bases azotées $E = \{A, T, C, G\}$ avec la matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(les lignes et les collones en ordre } A, T, C, G).$$

1. Déterminer les classes d'irréductibilité et le caractère récurrent ou transitoire de chaque état.
2. Partant de C, quelle est la probabilité d'absorption en G ?
3. Combien de temps, en moyenne, met-on jusqu'à ce que la chaîne soit absorbée en $\{A, G\}$?

Exercice 3 *En hiver le lac Manicouagan est entièrement gelé : l'ivrogne peut continuer sa promenade*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ de probabilités de transition

$$p(0,1) = 1, \quad p(x, x+1) = 1 - p(x, x-1) = p, \ \text{ lorsque } \ x \geq 1, \quad \text{ où } \ 0 < p < 1.$$

1. Calculer $\mathbb{P}_0(X_4 = 2)$.
2. Cette chaîne est-elle irréductible ?
3. Justifier que $p^{(n)}(0,0) = 0$ pour n impair et que $p^{(n)}(0,0) > 0$ pour n pair.
4. Montrer qu'une mesure invariante pour P est donnée par
$$\mu(0) = 1 \quad \text{et} \quad \mu(x) = \frac{1}{p}\left(\frac{p}{q}\right)^x, \ \text{ lorsque } \ x \geq 1, \quad \text{ où } \ q = 1 - p.$$
5. Déterminer les valeurs de p pour lesquelles la chaîne admet une probabilité invariante $\mathtt{m}$. Montrer que $\mathtt{m}$ est réversible pour P et qu'elle est la seule probabilité invariante.
6. On rappelle que $\tau_0 = \inf\{n \geq 1 : X_n = 0\}$. En supposant que la chaîne est récurrente positive, trouver $\mathbb{E}_0(\tau_0)$, le temps moyen de retour à l'état 0, en fonction de p. En déduire que si $p \geq \frac{1}{2}$, alors la chaîne n'est pas récurrente positive.
7. Soit $\sigma_y = \inf\{n \geq 0 : X_n = y\}$ et on note $u_N(x) := \mathbb{P}_x(\sigma_0 < \sigma_N)$, pour $0 \leq x \leq N$, où $N \geq 2$ est un entier. Trouver une équation satisfaite par u_N. On pourra utiliser un raisonnement à un pas (conditionner par X_1). Montrer que u_N est donnée par
$$u_N(0) = 1 \quad \text{et} \quad u_N(x) = 1 - \frac{\sum_{\ell=0}^{x-1}(q/p)^\ell}{\sum_{\ell=0}^{N-1}(q/p)^\ell}, \quad \text{lorsque } \ 0 < x \leq N.$$
8. Montrer que $U(0,0) = \mathbb{P}_0(\tau_0 < \infty) \geq u_N(1)$ pour tout $N \geq 2$. Calculer $\displaystyle\limsup_{N\to\infty} u_N(1)$ et en déduire que si $p \leq \frac{1}{2}$, alors la chaîne est récurrente.