UFR Mathématiques
Université de Rennes 1

Master 1ère année
Année 2007/2008

Probabilités de base : contrôle continu no. 1

mardi 9 octobre 2007 - durée 1 heure
calculatrice interdite - documents (cours manuscrit ou imprimé) autorisés

Exercice I.

Sur l'espace de probabilité $(]0,1], \mathcal{B}(]0,1]), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $]0,1]$, on considère la variable aléatoire $X(\omega) := -2\ln\omega$.

a) Trouver la fonction de répartition de X. Pour u, v réels positifs quelconques comparer $\mathrm{P}(X > u + v)$ et $\mathrm{P}(X > u)\mathrm{P}(X > v)$. X a-t-elle une loi remarquable ?

b) On pose $Y := 1 + [X]$, où $[\cdot]$ note la fonction partie entière. Pour $k \geqslant 1$ entier calculer $\mathrm{P}(Y = k)$. S'agit-il d'une loi remarquable ?

c) On note $Z := X - [X]$. Montrer que, pour tout réel t, $\{Z \leqslant t\} = \bigcup_{n=0}^{\infty}\{n \leqslant X \leqslant n+t\}$. En déduire la fonction de répartition de Z. Possède-t-elle une densité ? Si oui, trouver la densité.

Exercice II.

Soit $g : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue et on note $I := \int_0^1 g(x)dx$. Supposons que le couple aléatoire (U,V) est de densité $f_{(U,V)}(u,v) = \mathbb{1}_{[0,1]\times[0,1]}(u,v)$.

a) Quelles sont les lois de U et de V ? Montrer que $V > 0$ presque sûrement et que $\mathrm{P}(g(U)/V \geqslant 1) = I$.

b) On pose $X := \mathbb{1}_{\{V \leqslant g(U)\}}$, $Y := g(U)$ et $Z := \frac{1}{2}[g(U) + g(1-U)]$. Après avoir justifié que les variables X, Y et Z sont de carré intégrable, montrer que $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(Z) = I$ et que $1/4 \geqslant \mathrm{Var}(X) \geqslant \mathrm{Var}(Y) \geqslant \mathrm{Var}(Z)$.